ALDO YOSHIKAZU YAMASHIRO

A MATEMÁTICA DO SÉCULO XXI
O AVANÇO NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito à obtenção do grau de Mestre.
Curso de Mestrado em Educação, Setor de Pós-Graduação,
Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
Orientador: Drª Zélia Milléo Pavão

Curitiba
1995

PARECER FINAL DO EXAME DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PEDAGOGIA UNIVERSITÁRIA, DA PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ.

A dissertação **A MATEMÁTICA DO SÉCULO XXI O AVANÇO NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZADO DA MATEMÁTICA.**

defendida por **ALDO YOSHIKAZU YAMASHIRO**

foi julgada adequada para obtenção do título de Mestre em EDUCAÇÃO, e recebeu dos examinadores os seguintes conceitos:

Prof.ª Dr.ª **ZELIA MILLÉO PAVÃO** Conceito..A......

Prof.ª Dr.ª **REJANE DE MEDEIROS CERVI** Conceito..A......

Prof. Ms. **ROMUALDO WANDRESEN** Conceito...A.....

Conceito final..........A..

Observação:..
....
....

Curitiba, 27 de Setembro de 1995.

NOMES	ASSINATURAS
Prof.ª Dr.ª ZELIA MILLÉO PAVÃO	....
Prof.ª Dr.ª REJANE DE MEDEIROS CERVI	....
Prof. Ms. ROMUALDO WANDRESEN	....

ALDO YOSHIKAZU YAMASHIRO

A MATEMÁTICA DO SÉCULO XXI
O AVANÇO NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito à obtenção do grau de Mestre.
Curso de Mestrado em Educação, Setor de Pós-Graduação,
Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
Orientador: Drª Zélia Milléo Pavão

Curitiba
1995

ALDO YOSHIKAZU YAMASHIRO

A MATEMÁTICA DO SÉCULO XXI
O AVANÇO NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito à obtenção do grau de Mestre.
Curso de Mestrado em Educação, Setor de Pós-Graduação,
Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
Orientador: Drª Zélia Milléo Pavão

Curitiba
1995

ALDO YOSHIKAZU YAMASHIRO

A MATEMÁTICA DO SÉCULO XXI
O AVANÇO NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZADO DA MATEMÁTICA

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado em Educação - Pedagogia Universitária, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Orientador: Profa. Zélia Milléo Pavão
PUC - PR

Profa. Rejane de Medeiros Cervi
UFPR

Prof. Romualdo Wandresen
UFPR

Curitiba, 27 de setembro de 1995

Educar significa orientar em seu desenvolvimento um ser jovem de reconhecida individualidade , único como suas impressões digitais, e digno de receber assistência sistemática no sentido de poder desenvolver seus interesses e habilidades a seu máximo, a fim de viver sua vida plenamente, em liberdade e feliz, com direito de ser diferente dentro de um grupo, enquanto reconhece seu dever como membro importante da humanidade.

Dalilla C.Cperb

SUMÁRIO

RESUMO

O trabalho se propõe a examinar a influência da tecnologia no avanço do aprendizado da Matemática em relação ao processo usual. Analisa o provimento da máquina de calcular como instrumento de ensino na sala de aula, resgatando o algoritmo instrumentalizado pela tecnologia. A metodologia de pesquisa utilizada é a exploratória, enquanto abordagem de estudo para desenvolvimento da hipótese, que se refere à inclusão da Informática como meio - e não como fim - na atividade do aprendizado. Para tanto, elegemos classes de aula de terceiro grau em níveis diferenciados de área de conhecimento. Aplicamos o instrumento de coleta de dados observando os acertos e erros em relação a utilização ou não da máquina de calcular. Sob a ótica do ensino da Matemática, a inserção de equipamentos como as máquinas de calcular e mais recentemente os computadores, gera polêmica entre os doutrinadores. Posições conservadoras julgam que a presença da tecnologia, como máquinas de calcular e computadores, durante o ensino desestimula a capacidade de raciocínio e incorre no desentendimento do processo, priorizando somente o resultado como fim-utilidade. Reforçam os preconceitos à informatização do ensino, a decadente situação dos conceitos básicos da Matemática, demonstrado pela maioria de alunos pesquisada. Considerando desnecessário o processo de resolução dos problemas, a própria sociedade industrial-capitalista prioriza e exulta os resultados, porque são estes que "realmente fazem a diferença". Prova de que o conhecimento da lógica e do processo fundamental é o algoritmo, processo que agiliza o raciocínio para que se descubram os passos a serem seguidos. A clareza do caminho percorrido evita erros grosseiros no tão importante resultado esperado. A tecnologia, diversamente do pensamento conservador, é o instrumento que prioriza o processo ensino-aprendiado, devido a necessidade de "ensiná-lo" (a própria máquina) a pensar logicamente, a "entender" os processos que os próprios operadores desenvolvem. Na Matemática, como em qualquer ciência, a Informática deixa de ser fornecedora de resultados rápidos, para, sob uma análise mais aprofundada, ser instrumento que agiliza o processo, sem o desconsiderar.

ABSTRACT

This paper intends to analyse the influence of technology in the later development in the learning of Mathematics, compared to the usual processes. It analyses The adoption of the calculator as a teaching instrument, bringing back the algorythm worked out through technology. The methodology involved was exploratory to support a hypothesis referring to the inclusion of data processing as a mean to the learning processes - not a goal.College classes with different kwowledge levels were chosen and the level of mistakes was cheked with or without the use of calculator.The ideas about the use of calculators, and even computers, on math teaching, are varied and many times opposite among the.experts. Many of those stand for the idea that the use of this technology weakens the thinking processes because it doesn't develop the understanding of the process it gives attention only to the results as an utilitary goal. This group strengthens the rejection for computerized teaching, and the litte attention about the basic Math concepts shown by a magority of students. Considering result the only item that "really makes a difference", the industrial - capitalist society praises the results, paying no attention to the processes that bring them up. A proof of the importance of the logics and of the process is the algorythn, while it makes faster the thinking process in the discovery of the steps to be followed. A clear path avoids childshi mistakes in the expected results. The technology, contrary to that way of thinking, is the instrument the cares about the teaching - learning process because of the necessity of "teaching" the machine how to think logically and understanding the processes developed by the operators.
In Math, as well as in any other science data processing comes to be an instrument of velocity for the process, and not only an instrument for "fast results".

INTRODUÇÃO

O debate que se nos impõe hoje nas academias remete a um saber integrado no cotidiano das instituições que estão se desenvolvendo no processo de tecnologia de ponta, determinando que o que nós fazíamos e utilizávamos ontem já fica obsoleto e compromete o progresso de hoje.

O professor que vislumbra este contexto não pode se garantir no saber secularizado, sem o compromisso de trabalhar com seus alunos a ousadia de criar e inovar a relação em sala de aula com esta convocação da realidade tecnológica.

A reengenharia do processo ensino-aprendizagem da matemática leva à utilização de recursos que capacitem o futuro profissional a competir no mercado de trabalho e na promoção da qualidade de vida de sua comunidade.

O professor de Matemática, além de responsável pela transmissão do saber estabelecido, também tem que instrumentalizar os alunos de acordo com a realidade tecnológica.

Considerar este trabalho como uma possibilidade do professor em sala de aula sugere questionamentos quanto ao seu papel e função, bem como o desempenho solidário com seus alunos neste compromisso pedagógico.

Para que serve a matemática (na formação do cidadão)?

O seu conhecimento, para o cidadão, é fundamental pois em tudo que se pensa atualmente a ela está envolvida.

O homem sempre está à procura de um determinado ciclo de repetição, a fim de que não tenha mais o trabalho de pesquisar e pensar para solucionar um problema.

As pessoas menos envolvidas com a Matemática em geral tendem à mecanização do raciocínio e podem se deixar levar pela própria experiência intuitiva ou - pior - pela ótica dos meios de comunicação social sobre determinados problemas.

Nós temos a capacidade de distinguir algo considerado belo de algo considerado feio. Muitos dizem que o gosto depende de cada pessoa, mas podemos seguir algumas regras e obter um consenso estético que agrade a maioria. É o caso, por exemplo, de quando se usam algumas regras de proporção geométrica, como o uso do número de ouro ou divina proporção (anexo 1). O resultado é um equilíbrio que tende agradar boa parte das pessoas.

Isto significa que apreciar o que é belo também é apreciar a Matemática. Quem não gosta de música? Porém, o que nem todos sabem, é que a escala musical foi feita a partir da Matemática.

A complexidade da vida moderna que convoca o cidadão para relacionar-se com o mundo de forma interativa, impõe melhor formação matemática, principalmente em termos metodológicos seu o raciocínio. É importante considerar isto quando se aplica a tecnologia em geral, ao imaginarmos as suas aplicações na Física, em máquinas, nas telecomunicações etc.

Isto posto, verificamos a necessidade de abordar o ensino da Matemática **através da** Tecnologia, como forma de melhorar a qualidade do aprendizado, levando-nos à temática deste estudo que é:

A matemática do século XXI - A Tecnologia no processo ensino-aprendizado da Matemática.

A experiência em sala de aula levou-nos a rever as formas de trabalhar o melhor aprendizado, pois pela observação com alunos do ensino superior nas disciplinas de Cálculo, notamos que a maioria não sabe o que está calculando (na maior parte das vezes os alunos calculam de forma mecânica, reproduzindo processos de cálculo semelhantes e, por vezes, desnecessários à questão).

P. Ex: Calcular o domínio da função abaixo:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

Neste caso o aluno pode supor que deve calcular a equação do segundo grau, achando as raízes reais x1 e x2. No entanto, basta responder que o domínio da função é igual ao conjunto dos números reais.

Se o aluno sabe exatamente o que está fazendo, é possível, pelo menos, retirar as respostas absurdas, como dar uma resposta negativa para o cálculo de produção que só pode ser positiva.

A utilização de ferramentas no cálculo acaba ficando comprometida devido a essa inadequação do raciocínio lógico-matemático. O aluno pode aprender a operar qualquer ferramenta, mas não consegue dar o comando lógico, obtendo resultados igualmente absurdos (ou pelo menos errados).

P. Ex:

Calcular a expressão $\frac{3+9}{2}$.

Se o aluno não estiver atento ou não souber utilizar direito a ferramenta, no caso pode ser a calculadora, ele pode muito bem fazer $3+\frac{9}{2}$, que seria uma resposta errada devido a má utilização deste recurso.

R. Blanché (in:NOT, 1981, p.280) analisa esta forma de raciocínio como sendo a própria atividade matemática, que está se transformando.

> *Uma demonstração não mais apelará ao nosso sentimento espontâneo da evidência de certos encadeamentos lógicos; ela se ocupará de transformar, por graus sucessivos e sem queimar uma etapa, uma ou diversas fórmulas escrita anteriormente como axiomas ou teoremas, mencionando para cada uma dessas transformações elementares o número da regra que a autoriza até que, enfim, se chegue linha após linha, à fórmula procurada .*

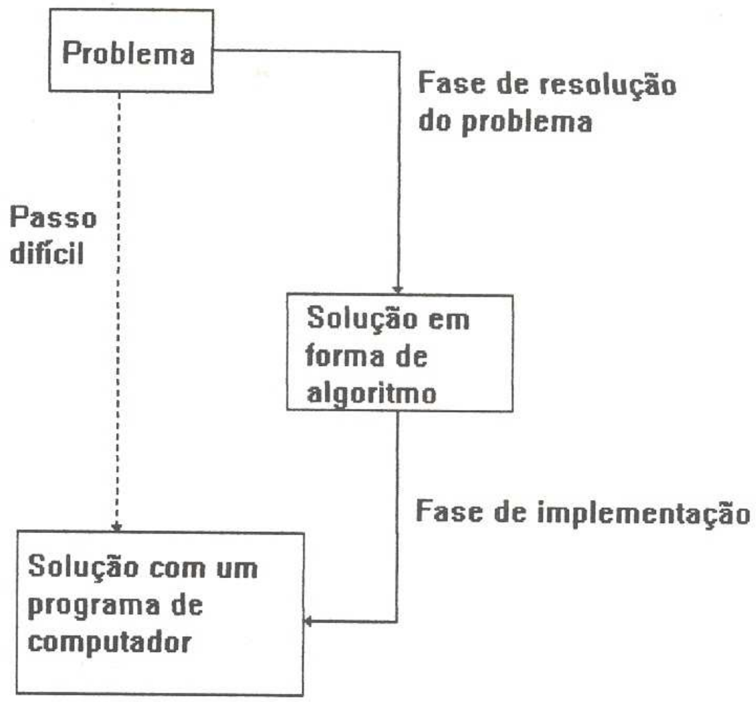
Na época de acadêmico, era possível notar que os colegas, dependendo da escola de origem, conheciam mais um assunto do que outro em razão do reconhecimento de sua aplicabilidade na prática. Porém, observando-se este "saber mais" ou "saber menos", pode-se separar em conhecer uma aplicação de forma clara ou não e, ainda, para alguns o ato de se aprender novos assuntos era simples enquanto para outros fugia à compreensão. Na verdade, o problema é que alguns tinham facilidade de abstrair e imaginar um assunto sem questionar, por características pessoais. "É de uma intuição totalmente diferente que se trata quando se apela ao sentimento de evidência ligado à experiência concreta para estabelecer a verdade das noções primárias." (NOT, 1981, p.278)

Nas escolas de primeiro grau foi possível identificar, através da observação simples e contatos informais com esta realidade, contatando aleatoriamente tanto com discentes, como com docentes, que alguns alunos (com dificuldade) tinham como professor primário alguém que não gostava da Matemática. Esta deficiência no processo pedagógico ainda poderia ser corrigida (caso observado pelos professores abordados, durante as aulas para a quinta série do primeiro grau).

Nas escolas do segundo grau, como os alunos eram oriundos de diferentes escolas (devido aos diferentes cursos profissionalizantes oferecidos) era possível notar desnível de conhecimento na mesma classe. Nas diferentes escolas havia um comportamento bem característico, sendo que o terceiro ano do segundo grau de Informática do Colégio SPEI, por exemplo, apresentava um grau de concentração um pouco maior (talvez devido ao fato deles, como programadores, poderem se defrontar com a necessidade de situação: é necessário entender o problema em primeiro lugar, para depois implementá-lo no computador).

Os alunos do curso de Informática têm uma disciplina que trabalha aspectos formais da computação, onde, com um número de palavras limitadas, deverá descrever como proceder, passo a passo, a resolução de um problema. Mas os problemas podem ser descritos de formas diferentes. Portanto, o resultado é o mesmo e a solução encontrada também a mais simples possível (quando desejamos implementar um programa, escrevemos muitos detalhes, procurando prever todas as variações do problema e suas soluções).

Para BUNT (1983, p.31), os passos para a resolução de um problema têm uma seqüência lógica mínima para que se alcance o resultado. **Vide** gráfico a seguir:



> *Primeiramente, é importante separarmos a fase de resolução do problema da tarefa que chamaremos de fase de implementação. Na fase de resolução do problema, nós nos concentramos na elaboração de um algoritmo para resolver o problema proposto. Somente após estarmos satisfeitos com a formulação de um algoritmo adequado é que passaremos à implementação deste algoritmo em alguma linguagem de programação. Dado um algoritmo suficientemente preciso, sua codificação em programa de computador é direta.*

O problema que ficou configurado após estas observações leva-nos a questionamentos sobre o ensino da Matemática:

O desconhecimento dos conceitos básicos da Matemática leva a um fazer mecânico e pouco interessante?

Os diferentes métodos de ensino causam diferentes dificuldades, ou facilidades, no ensino da Matemática a nível superior?

O ensino da Matemática continua sendo teórico, sem instrumental atualizado da última década, atestado por publicações periódicas, como por exemplo a Revista Globo Ciência (1994, p.48), que diz que a falta de tais instrumentais são provas "inquestionáveis do analfabetismo matemático brasileiro que, se não for erradicado rapidamente, condenará o país à eterna condição de subalterno num mundo cada vez mais dependente da ciência e da tecnologia". É preciso evoluir para que o aluno veja uma Matemática do seu tempo. Afinal, é necessário saber usar tudo aquilo que o homem inventou para facilitar a vida humana.

Não saber como usar um computador ou mesmo uma calculadora pode implicar na **limitação do rendimento pedagógico do aluno** .

Isto faz com que os programas de Matemática sejam obsoletos, e sempre iguais:

> *"Educação para o futuro. É a nossa missão preparar os jovens para o mundo de amanhã. Os programas de matemática são, em sua maioria, justificados exclusivamente porque "no meu tempo se fazia assim". A obsolência dos programas matemáticos é absolutamente injustificável". (D'AMBROSIO, 1990,p.15)*

Sem o conhecimento de computação, não seria possível demonstrar o célebre Teorema das Quatro Cores (anexo 2).

A idéia intuitiva e a sua solução, que pode ser demonstrada no limite a seguir, sugere a possibilidade da solução de outros limites:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 0$$

x	f(x)
1	-1
1,5	-,5
1,8	-0,2
1,9	-0,1
1,99	-0,01

x	f(x)
3	1
2,5	0,5
2,2	0,2
2,1	0,1
2,01	0,01

É possível imaginarmos quanto tempo uma pessoa poderia levar para calcular este limite na mão. Com certeza, se o mesmo cálculo fosse feito na calculadora, este tempo seria reduzido, eliminando também possíveis erros de cálculo.

Como hipótese inicial de estudo frente ao exposto supomos que:

A utilização da máquina de calcular e do computador leva o aluno a um maior rendimento no aprendizado da Matemática.

É possível levar o aluno a descobrir os conceitos básicos tirados dos problemas da atividade humana.

O computador, através de algoritmos simples, pode resolver tais problemas (idéia básica: cálculo numérico e análise numérica).

O uso de tecnologia específica no processo pedagógico da Matemática pode promover a criatividade, dependendo do conhecimento do aluno para tal.

É possível a demonstração de teoremas feitos por computador como, por exemplo, o Teorema das Quatro Cores.

Portanto, o objetivo geral é mostrar que o uso da tecnologia disponível e indicada para a resolução de problemas de Matemática não prejudica a aquisição de conceitos básicos e/ou algoritmos do cálculo; muito pelo contrário, **a tecnologia promove a qualidade do ensino da Matemática de 3° grau.**

O objetivo geral que norteia o estudo refere-se ao domínio de algoritmo necessário para a tecnologia do século 21, qual seja:

Caracterizar o domínio de algoritmos aprendidos no 1° e 2° grau que favorecem a plena utilização de tecnologia no 3° grau.

Os objetivos específicos decorrentes desta proposta são:

1. Relacionar o aprendizado de 1° e 2° graus com a facilidade de realização de cálculos matemáticos necessários ao aprendizado do 3° grau.

2. Estabelecer a ocorrência da criatividade para os diversos cálculos, como também a correlação com o domínio do ensino básico.

O Referencial Teórico apresenta os diversos posicionamentos de autoridades sobre o ensino da Matemática e o instrumental tecnológico em sala de aula.

Apresentamos no Referencial Metodológico, além do embasamento de pesquisa, sua forma de operacionalização na realidade investigada. Seguem-se as conclusões, anexos e referências bibliográficas.

1 Referencial Teórico

1.1 Uma questão de história

O estudo da Matemática sempre mereceu muito respeito (como qualquer outra ciência). Mas essa ciência tem uma admiração especial pelos que a dominam e pelos que não a dominam.

Os que a dominam conseguem ver uma poesia, uma beleza, uma ligação perfeita entre os números e a própria natureza.

Para dominar é necessário conhecer e entender a origem, a sua aplicação e a sua solução. Como diz Bento de Jesus CARAÇA: "Não basta conhecer os fenômenos; importa compreender os fenômenos, determinar as razões da sua produção, descortinar as ligações de uns com os outros". (1952, p. 64).

Os que não dominam perfeitamente essa ciência, admiram a exatidão de seus resultados (normalmente). Apesar disso, as dificuldades não o levam a uma agradável interação com a Matemática, mais parecendo o estudo de Mateologia. Afinal de contas, qual foi o professor que não ouviu a seguinte pergunta : Para que serve isso?

E Mateologia está definida, por HOLANDA como o "Estudo inútil de assuntos superiores ao alcance de entendimentos humanos" (Dicionário da Língua Portuguesa).

O ensino da Matemática sofre muito com os que insistem em fazer dela a Mateologia; e é necessário reaproximar mais a Matemática de seu verdadeiro significado. Para que isso ocorra, mister se nos faz uma organização e uma cuidadosa observação dos fenômenos da natureza num esforço reflexão.

> *Segundo o erudito Padre Leonel Franca, S.J., a palavra matemática é de origem aristotélica. Com efeito, o famoso estagirita dava aos filósofos, pitagóricos e eleatas, a denominação de "matemáticos". Esses filósofos eram assim chamados porque, ao contrário dos jônios e dos atomistas, partiram de conhecimentos a priori e menosprezaram a experiência. Não resta, portanto, a menor dúvida que, para Aristóteles, os matemáticos eram, mais ou menos, idealistas.*
>
> *A palavra Matemática, que se originou do grego, mathematikè, designava, na Grécia Antiga, o conjunto de conhecimentos então coordenados , depois a Astrologia e, finalmente, a ciência dos números, das formas, das relações, das grandezas e dos movimentos.* (TAHAN, 1965, p.45).
>
> *Matemática _ Do latim mathematicus, que por sua vez, originou-se do grego mathematikos; de Mathema, Mathesi, instrução ciência, isto é ciência por excelência; de mathô, mathanô, com raiz man do sânscrito - man, pensar , lembra-se, com um th agregado, como ocorre em muitos outros exemplos. Pictet acredita que o grego math, de mathô, matbanô, filia-se exatamente à raiz sânscrita math, medir,e que, portanto, Mathema e mathesi se aplicam à ciência do número e da medida. Convém assinalar que o sentido de pensar, refletir, aparece em geral, ligado a à idéia de medir, como se observa na maior parte das línguas alianas.* (LAROUSSE, IN:TAHAN, 1965, p.46).

O Dicionário de Aurélio Buarque de Holanda define a Matemática como a "Ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente". Já a Enciclopédia Britânica diz que a Matemática é uma "Ciência que lida com relações e simbolismos de números e grandezas e inclui operações quantitativas e soluções de problemas quantitativos".

A Matemática sempre foi uma ciência respeitada. No princípio, não existiam símbolos, os problemas eram elaborados em forma de enigma, que deveriam ser interpretados e resolvidos com palavras (isto principalmente no caso da Álgebra).

Por exemplo: O enigma da Idade de Diofante.

> *Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofante. E os números podem mostrar - oh, milagre - quão longa foi sua vida, cuja sexta parte constituiu sua formosa infância.*
>
> *E mais um duodécimo pedaço de sua vida havia transcorrido quando de pêlos se cobriu o seu rosto.*
>
> *E a sétima parte de sua existência transcorreu em um matrimônio sem filhos.*
>
> *Passou-se um qüinqüênio mais e deixou-o muito feliz o nascimento de seu primeiro filho, que entregou à terra seu corpo, sua formosa vida, que durou somente a metade da de seu pai.*
>
> *E com profundo pesar desceu à sepultura, tendo sobrevivido apenas quatro anos ao descenso de seu filho.*
>
> *Diga-me quantos anos viveu Diofante ? Resp. 84 anos.* (GUELLI, 1992, p.6)

Solução : (algébrica)

$x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$

$x = 84$ anos

Ora, se utilizarmos de símbolos matemáticos como os sinais de adição divisão e multiplicação, o problema torna-se-nos simples; porém, se não usarmos símbolo algum o enigma se nos tornará muito complexo.

> *A percepção permite evidenciar a interestruturação com o dado, a função simbólica com a representação do*

> *dado; o estudo da função de síntese , organizadora do conhecimento, permite apreender essas relações através das etapas sucessivas da evolução que leva do sincretismo inicial, no qual sujeito e objeto se confundem, ao conhecimento objetivo característico de todo saber científico* (NOT, 1979,p. 233).

A idéia intuitiva é o primeiro passo para o raciocínio de qualquer problema matemático. Tanto historicamente quanto a nível da estruturação do conhecimento para o entendimento matemático, a intuição surge como o elemento facilitador e desencadeador do raciocínio.

Pensemos inicialmente em duas operações matemáticas simples :

a) 12/ 5 = 12,3

b) 28/6 = 4,6

Das operações acima, não é possível dizer prontamente qual o resultado exato de cada uma. Porém, é possível, pelo menos, afirmarmos que a primeira está errada (doze dividido por cinco não pode ser maior que doze), já a segunda tem um erro muito menor, poderíamos dizer que existe apenas um erro de aproximação. Observamos que a simples idéia intuitiva de grandeza pode evitar erros - pelo menos os absurdos -, isto nos mostra como são importantes os conceitos lógicos para a Matemática.

> *O sujeito constrói o objeto quando descobre os números novos a partir daqueles que conhecem ou quando efetuam as aproximações de estruturas atualizadas, que lhe revelam a comutatividade, a associatividade, etc. Em contra partida, na atualização das estruturas operatórias que caracterizam os números sucessivamentes estudados, o objeto, por suas propriedades operatórias que são independentes do sujeito, estrutura este último. Do mesmo modo, a noção de numeração decimal os mecanismos das operações constituídas em objetos culturais estruturam o aluno*

> *antes que ele chegue a submetê-las a uma análise racional que reconstituirá estas estruturas. Um esquema análogo aparece com o número decimal; é a criança que constrói a idéia de um número que não é inteiro, mas são os instrumentos culturais oferecidos pelo sistema métrico que lhe oferecem sua forma (idem,* 1981, p.317).

1.2 O fracasso da Matemática no cenário do ensino

"A Matemática está errada". Este é o tema da reportagem da revista Globo Ciência, apontando que isto ocorre quando da utilização de símbolos matemáticos que também têm significação em outras ciências, como se fosse uma função específica a sua aplicação na Matemática. Este "esquecimento" do professor sobre os outros significados dos símbolos gera no aluno uma forma de dissociação do mundo real, como se o aprendizado da Matemática fosse uma experiência fora do seu cotidiano. Há uma valorização da Matemática simbólica em detrimento da Matemática aplicada.

A reportagem começa com a leitura da definição de números racionais usando símbolos matemáticos, ou seja Q={ p/q / pεZ e qεZ*}. Isto significa que Q é igual a p dividido por q tal que p pertence ao conjunto dos números inteiros e q pertence aos números inteiros sem o zero, ou ainda poderíamos dizer que Q é o conjunto dos números que podem ser escritos sob a forma de fração.

A real crítica da reportagem é contra a Matemática Pura. Na verdade, alguns conceitos devem ser dados de forma pura, mesmo porque a Matemática pode se desenvolver sem imaginar aplicações.

Quem sabe redesenvolver a Matemática usando uma nova base numérica como no caso dos computadores onde a base numérica é dois e não dez, isto devido à condição de 5 volts (representando o 1) ou zero volts (representando o zero). Esta nova base numérica de contagem escolhida com o devido cuidado seria o doze, pois, como diz Bento de Jesus CARAÇA: "Têm sido usadas outras bases, mas, quase sempre, números múltiplos de dez. E no entanto, a base ideal seria 12, porque se presta melhor que a dez a subdivisões; dez tem apenas dois divisores além dele (além da unidade): 2 e 5; doze tem quatro: 2; 3; 4; 6" (1989, p. 5).

O ensino da Matemática pode ser facilitado sempre que estiver aliado a uma aplicação prática, como por exemplo, a utilização da moeda no cotidiano do aluno, que deve ser sempre adequada ao momento. Citando o livro de Matemática do Bianchini (1991, p.109) para a 6ª série do primeiro grau que, em uma de suas tentativas de aplicação da Matemática, usa a Matemática Finaceira como meio de sua operacionalização. Para um adulto isto será muito útil, mas para uma criança isto pode ser tão ou mais abstrado que a própria matéria em si e, pior ainda, pode ser para a criança uma segunda dúvida, uma segunda barreira, pois neste caso ela tem que entender duas coisas ao invés de uma.

1.3 A consciência no estudo - a conseqüência lógica

O aluno hoje pode estudar o sinal de uma função, e ao final deste estudo conseguir dizer quais os intervalos em que a função é positiva, negativa e quais são os pontos em que a função não tem sinal algum (não tem sinal ou por ser igual a zero ou por não existir neste ponto). O grande problema aqui é que o aluno normalmente resolve a questão de forma mecânica e não de forma racional (ou seja, sabendo realmente o que está fazendo). Isto o levará a cometer erros absurdos.

Neste caso, estudar o sinal de uma função nada mais é que estudar qual o sinal da função no Eixo das Ordenadas, de acordo com a variação dos valores de x no Eixo das Abcissas. Isto pode ser facilmente visto no gráfico da função.

Com isto, o próximo assunto - que poderia ser, por exemplo, máximos e mínimos - seria apenas uma conseqüência lógica e não mais um fazer mecânico.

Uma forma simples, porém trabalhosa de chegarmos aos resultados de muitos dos problemas matemáticos também nos leva a supor que a simplicidade nem sempre é facilitadora do seu processo de resolução.

Os dois assuntos propostos acima - o estudo do sinal da função e o estudo de máximos e mínimos- podem ser resolvidos graficamente, mas é impossível mostrar o gráfico completo de uma função (pois esta pode variar de mais infinito a menos infinito). Devemos levar em conta ainda que quanto mais pontos, melhor a representação gráfica. Ao observarmos isso, notamos que é muito trabalhoso resolver todos os problemas que envolvam sinal de função graficamente.

Naturalmente, não são as formas trabalhosas nem os trabalhos de ontem que interessam a escola do amanhã. É preciso entender que tanto a forma mais trabalhosa quanto a sua história servem para fazer com que o aluno entenda melhor um determinado assunto.

Hoje, o que o estudante deseja saber é onde se aplica o conhecimento - o que não é uma tarefa muito simples de se explicar - e qual a forma mais prática de se resolver um problema. Podemos citar que muitas pessoas calculam a porcentagem de um determinado valor usando a tecla % das calculadoras. Mas, estas mesmas pessoas não seriam capazes de calcular o mesmo valor sem esta tecla. Aqui notamos uma falha do ensino que, na prática, talvez não cause problema algum a esses profissionais. Mas fica claro que o ideal é fazermos com que o profissional sempre saiba o que está fazendo e da melhor forma possível. Isto que o estudante está reivindicando é o que o coloca em níveis de competitividade no mercado de trabalho e que o instrumentaliza no avanço do conhecimento. Ele precisa ser mais dinâmico para enfrentar as dificuldades do mundo atual.

1.4 As possibilidades da interferência do professor ou aonde o professor pode levar o aluno

A comparação entre o rendimento e compreensão através de problemas para serem interpretados (fugindo, assim, dos problemas mecânicos), e geração de algoritmos, torna-se-nos uma possibilidade de promoção desta qualidade do ensino da Matemática.

Imaginemos agora que um aluno elabore um algoritmo para solucionar um problema qualquer. Isto garante que ele realmente conhece o assunto em questão.

Por exemplo :

Carlos pede empréstimo de R$ 8.000.000,00 a um banco X, que deverá ser pago em 10 parcelas mensais de R$ 1.800.000,00, com uma carência de 3 anos. Pergunta-se:

Qual a taxa de juros cobrada pelo banco X?

Solução :

$$P_4 = 1800000.\frac{[1-(1+i)^{-10}]}{i}$$

$$P_4 = 8.000.000(1+i)^4$$

$$8.000.000(1+i)^4 = 1800000.\frac{[1-(1+i)^{-10}]}{i}$$

Observamos que esta questão não tem solução analítica pois não é possível isolar i.

É possível ensinarmos Cálculo Numérico fazendo o próprio aluno descobrir o método. Para que isto aconteça é necessário que o aluno entenda o problema a ser resolvido, e procure uma solução não algébrica.

A solução do problema deve ser dada pelo professor em forma de texto ou de algoritmo. Neste ponto o aluno deve analisar o problema e solucioná-lo de acordo com o algoritmo dado.

Solução do exemplo acima.

$$8.000.000(1+i)^4 = 1800000.\frac{[1-(1+i)^{-10}]}{i}$$

$$1 = \frac{0{,}225[1-(1+i)^{-10}]}{(1+i)^4 i}$$

Podemos, a partir deste ponto, utilizar um algoritmo iterativo que é capaz de se aproximar cada vez mais do valor de i desejado; se for considerada uma determinada precisão necessária, pode-se dizer que o resultado que irá ser obtido é perfeito (Método da Bisseção).

1.5 Considerações sobre Métodos de ensino de Matemática

É possível estudarmos vários métodos de ensino de Matemática (embora ainda haja muita confusão na metodologia aplicada). Normalmente, temos um método onde a maior preocupação é fazer com que o aluno entenda o que está estudando. Estes métodos dão uma ênfase especial ao estudo com material concreto - como material dourado utilizado no método da Pedagogia Montessoriana. Só que este método pode falhar caso o professor não saiba retirar o material do aluno no momento certo, pois é muito importante que o aluno saiba abstrair através da realização do cálculo mental.

Outro método tem uma preocupação excessiva com o treinamento (caso do método Kumon), onde a resposta correta não é o suficiente para que o aluno vença aquela etapa, pois lhe é cobrado também um tempo máximo que não deve ser ultrapassado. Melhora a associação, a firmeza no cálculo, o tempo de elaboração das respostas e, conseqüentemente, a nota e a auto-estima do aluno. Não enfatiza as aplicações, apesar de ser um ponto de importância fundamental para o aluno gravar o assunto que está sendo ministrado com uma facilidade maior, já que está vendo alguma aplicação.

> *Considerando os efeitos do universo objetivo, os trabalhos da Escola de Genebra mostraram o papel da atividade do sujeito na percepção, na memória, no conhecimento, explicam de maneira que nos pareceu irrefutável a formação dessas estruturas pelo produto da ação que o sujeito exerce sobre o mundo e daquela que o mundo exerce sobre ele. (idem,* 1981,p 239*)*

O computador pode gerar um novo método para o ensino da matemática (bem como das outras ciências) ou então ser uma nova ferramenta para velhos métodos.

O matemático Seymur Papert, baseando-se nas teorias de psicologia Genético-Evolutiva de Jean Piaget, onde a criança é vista como um epistemólogo, capaz de construir sua próprias estruturas intelectuais, criou o LOGO, propondo toda uma nova transformação da concepção de ensino aprendizagem, onde o educando se torna pensador ativo e crítico

> *Na maioria das situações educacionais contemporâneas em que crianças são postas em contato com computadores, o computador é usado para fornecer-lhes informações respeitando-se ritmo e características individuais dentro de um nível apropriado de dificuldade. É o computador programando a criança. No ambiente* LOGO *a relação é inversa: a criança, mesmo em idade pré-escolar, está no controle - a criança programa o computador. E ao ensinar o computador a "pensar", a criança embarca numa exploração sobre a maneira como ela própria pensa. Pensar sobre modos de pensar faz a criança tornar-se um epistemólogo, uma experiência que poucos adultos tiveram.* (PAPERT, 1985, p. 35*)*

1.6 Algoritmos: o acesso ao futuro

Para se elaborar um algoritmo qualquer é necessário principalmente saber o que se deseja, conhecer bem, o problema e sua solução, e qual o "vocabulário" a ser usado (no caso, uma linguagem de programação). Por definição "um algoritmo pode ser definido como uma seqüência ordenada e sem ambigüidade de passos que levam à solução de um dado problema" (BUNT, 1983, p.31).

A Matemática utiliza algoritmos para a solução de problemas muito tempo antes do surgimento das máquinas de calcular e dos computadores.

> *"Algoritmos desempenham um papel importante na matemática desde Euclides, e mesmo antes do nascimento da Álgebra. Eles constituem o mais importante elemento matemático de informática. Nós nos referimos ao papel de algoritmos como ferramentas essenciais em cálculo". (D'AMBROSIO,1986 p. 106)*

Para darmos um exemplo apresentamos um algoritmo do tempo Euclides (século III a.C.). Iniciamos revisitando a Geometria onde Euclides e os antigos matemáticos realizavam todas as operações matemáticas, utilizando somente régua e compasso (um detalhe interessante é que esta régua não tinha qualquer graduação). **Isto porque a Álgebra não era considerada digna de estudo, sendo relegada a escravos.**

Os euclidianos preocupavam-se somente com as relações que poderiam ser obtidas geometricamente. Mesmo que na obra "Os elementos de Euclides", ele não trate exclusivamente de Geometria, pois o livro II e o livro V versam sobre a Álgebra, as soluções sempre são obtidas através da Geometria.

Utilizemos um problema da Álgebra que pode ser resolvido geometricamente:

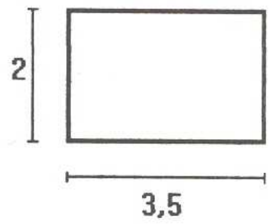
Se juntarmos a uma barra de ouro, o equivalente a sua metade e depois a sua quarta parte, obteremos 7 Kg. Quantos quilos pesa o anel?

Através de uma equação algébrica podemos resolver este problema facilmente:

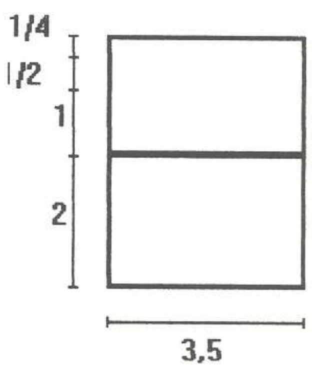
$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=7 \qquad x = 4\ \text{Kg}$$

Nos elementos, Euclides não resolve equações de coeficientes numéricos. Mas torna-se-nos mais fácil encontrar a raiz desta equação através da Álgebra Geométrica de Euclides, como o exemplo proposto por Oscar GUELLI (1992, p.16):

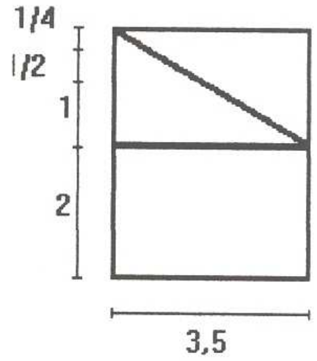
Inicialmente construímos um retângulo de área igual a 7:



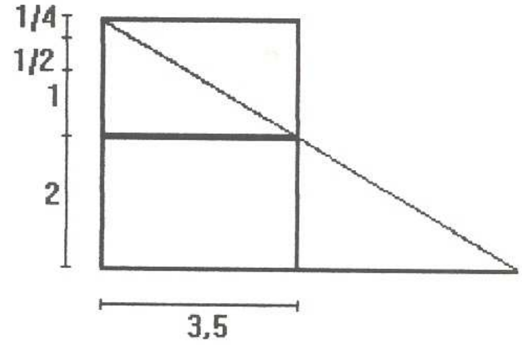
Desenhamos sobre este retângulo um novo retângulo de lados 3,5 e $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$*:*



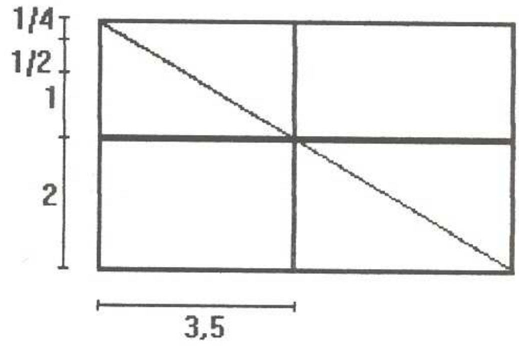
Traçamos a diagonal do triângulo superior:



Prolongamos a diagonal até encontrar o prolongamento da base:

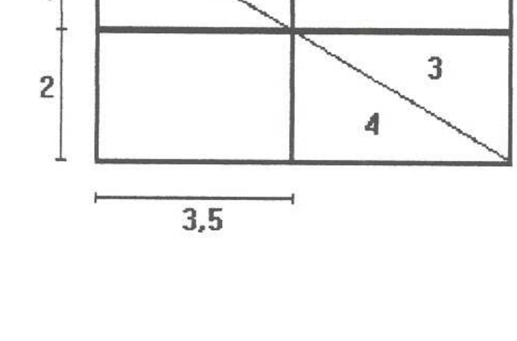


E completamos agora o retângulo da parte maior:

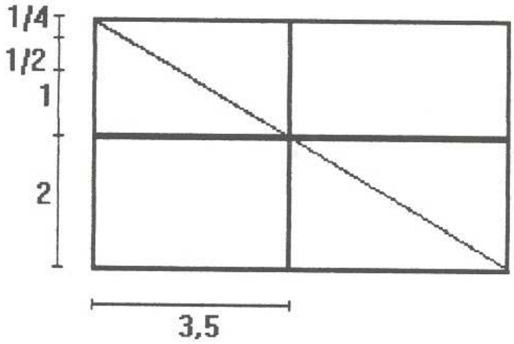


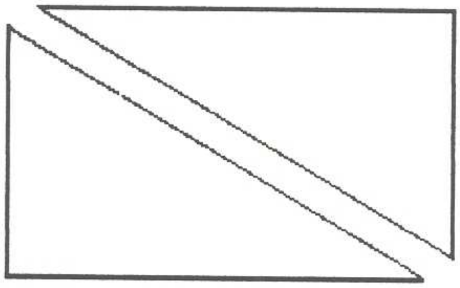
Uma diagonal de um retângulo didide-o em dois triângulos equivalentes. Por isso podemos concluir que :

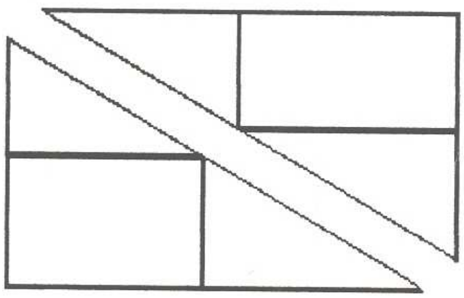
área 1 = área 2 e área 3 = área 4

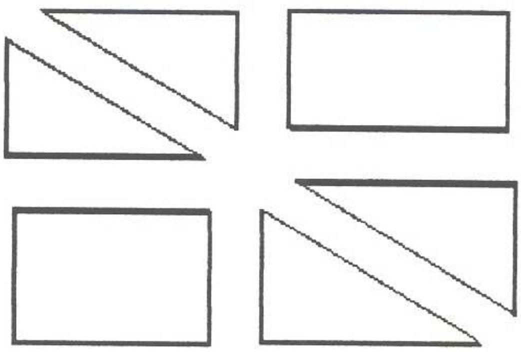


Considerando o retângulo maior, vemos que a diagonal o divide em dois triângulos, que também têm a mesma área:



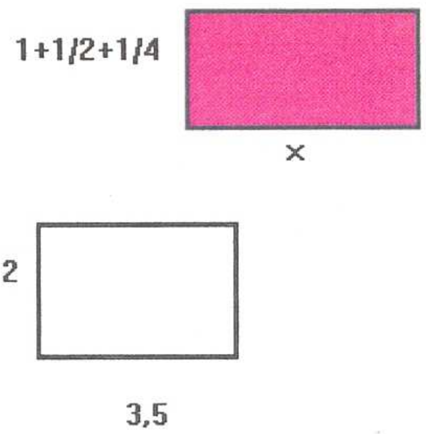






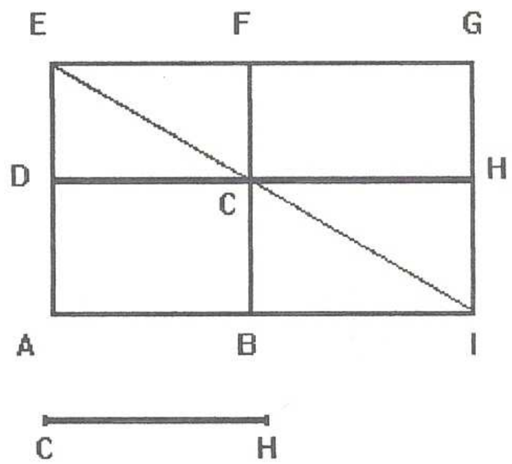
Como você pode observar, os dois retângulos da figura anterior têm a mesma área. Se representarmos por x a base do retângulo vermelho, podemos escrever:

$$3{,}5 \,.\, 2 = X \,.\, \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$



O número X, que é a medida de um lado desse retângulo, é a raiz de equação.

Para Euclides, porém, a resposta do problema não era um número, mas o segmento $\overline{CH}$



Esta é uma seqüência trabalhosa na sua elaboração, mas não deixa de ser uma forma engenhosa, principalmente se observarmos que na época não se utilizavam símbolos matemáticos.

Também temos diferentes soluções que um algoritmo pode oferecer para um mesmo problema, como a seguir:

Em uma multiplicação de um número de três algarismos por um outro número de três algarismos podemos realizá-la das seguintes formas:

a) forma tradicional

342 x 536 =

```
       342
      x536
      2052
     1026 +
    1710    .
   183.312
```

b) uma forma não tradicional

```
     342
    x536
    1710
     1026
      2052
   183.312
```

c) uma forma no computador

```
var :  i, x  inteiros ;
        início
            i=0;
            x=0;
            enquanto (i<536) faça
                i= i+1;
                X = X+342 ;
            fim enquanto;
        fim
```

Observamos que neste algoritmo simples resgatamos a idéia original que para multiplicar 342 por 536 basta somar 342, 536 vezes.

Em relação aos algoritmos acima podemos nos questionar sobre qual a melhor forma de multiplicar os números entre si? A demonstração possibilitada pelo computador é a forma mais simples para a criança que não conhece bem a tabuada, enquanto que o adulto tem dificuldades para entendê-la.

Será que o aluno entende as três formas quando realiza esta operação?, ou será que apenas mecanizou um processo e não sabe o que faz direito, porque não conhece o conceito?

Quando um aluno entende as três formas de fazer uma simples multiplicação passa a dominar esta operação e deixa de achar que só existe um tipo possível de solução para o problema proposto. Se isto acontecer o aluno pode começar a procurar uma forma nova e própria para solucionar os diversos problemas existentes. Ou seja, usará a própria criatividade, nem que seja para reinventar a roda.

1.7 Uma introdução à tecnologia em sala de aula: calculadoras

O que estamos presenciando hoje é uma verdadeira revolução no ensino, que na Matemática iniciou-se com a calculadora digital, hoje cada vez com mais funções. Diríamos que isto iniciou-se com a calculadora de bolso e hoje já estamos passando para o microcomputador (o laptop). Com estes acontecimentos são necessários quebrarmos alguns antigos preconceitos no ensino da Matemática, pois entendermos que existe uma nova tecnologia que pode nos ajudar a sermos mais eficientes na promoção do conhecimento científico de ponta.

Muitas vezes, os professores de Ciência Exatas combatem o uso de calculadoras nas suas aulas. Como justificativa, eles dizem que "o aluno precisa aprender a pensar". Isto não é verdade, pois, em primeiro lugar, este "ensinar a pensar" não é uma tarefa tão simples, resolvida com apenas alguns exercícios de memorização e condicionamentos que a tornam possível. Por ser um instrumental da razão, o raciocínio humano pode ser operacionalizado pela Matemática através da lógica matemática. E certamente, não é a disciplina de Matemática que vai fazer isso sozinha. Para ensinarmos também a pensar, precisamos passar do raciocínio puro para o raciocínio aplicado (algo útil, uma aplicação efetiva, que nem sempre é viável em sala de aula).

Como diz o professor Nilson José MACHADO:

> *A Matemática ensina a pensar.*
> *Sem dúvida, isto tem feito muitos professores de Matemática estufar o peito, inflamar-se de brios : ensinamos a pensar.*
> *Naturalmente, no mais das vezes, trata-se de uma visão ingênua do papel que a Matemática desempenha no conjunto das disciplinas ministradas em qualquer nível de ensino. Uma visão que reduz o verbo pensar a intransitivo, que ignora, basicamente, que não se pensa no vazio: pensa-se em alguma coisa ou alguma coisa, de alguma forma. (1987, p. 59)*

O professor de Matemática provavelmente aprendeu isto com o seu professor de Matemática, e hoje repassa isto como uma verdade irrefutável.

A questão que se nos impõe disto tudo é que os problemas de sala de aula se distanciaram da prática cada vez mais. Na maioria das vezes, os valores calculados são fracionários na nossa realidade, e os exercícios são planejados para serem resolvidos com valores exatos. O real nos causa um trabalho diferente destes exercícios restritos da escola, em termos de pequenas multiplicações, adições, divisões e subtrações, cálculos estes básicos que geralmente levam a erros. Sendo assim, porque não usarmos uma calculadora e cairmos na real?

Alguns autores criticam o uso da calculadora como uma forma de criar dependência do raciocínio matemático. Ora, se assim fosse, ao anotarmos um algoritmo no papel estaríamos também criando uma dependência com o papel e o instrumento de anotar, pois expressaríamos o nosso pensamento e nos esqueceríamos dele.

Nesta forma de raciocínio poderíamos criticar que o homem ao inventar a máquina de andar perderia o hábito de caminhar por suas próprias pernas, comprometendo a sua habilidade de andar. Então é correto inferirmos que a máquina de calcular também não comprometeria a habilidade do pensamento de calcular. Embora alguns professores de Matemática se posicionem com esta crítica sobre as calculadoras.

Se soubermos interpretar os números, mesmo que gerados por uma máquina, teremos uma relação direta entre o cálculo e a sua aplicação. O aluno que sabe identificar o processo mental que o mobilizou mecanicamente no uso da calculadora, tem seu potencial intelectual desenvolvido.

A máquina de calcular não substitui o raciocínio do aluno, instrumentaliza-o. Para Louis NOT (1981, p.233)

> *"A percepção permite evidenciar a interestruturação com o dado; o estudo da função de síntese, organizadora do conhecimento, permite apreender essas relações através das etapas sucessivas da evolução que leva do sincretismo inicial, no qual sujeito e objeto se confundem, ao conhecimento objetivo característico de todo saber científico".*

Quanto ao uso da calculadora para melhor visualizarmos suas aplicações, imaginemos a criação de uma aplicação onde o resultado é um valor irracional (ou ainda, quando é necessário considerarmos muitas casas após a vírgula, caso de muitas taxas de juros). Neste caso, o professor elabora problemas nos quais os resultados são exatos, dando a falsa impressão de que nunca vai acontecer um problema inexato (caso dos números irracionais), sem contar ainda que com uma calculadora podemos fazer um número muito maior de exercícios, onde o aluno pode retificar o conhecimento (é claro que não podemos ensinar a tabuada a uma criança usando uma calculadora; pressupomos um aluno de terceiro grau).

Podemos estar criando um tecladista dependente da máquina e não um profissional. Este é um risco que corremos, caso não os orientemos ou caso aceitemos qualquer tipo de calculadora (pois existem máquinas que fazem praticamente todos os tipos de cálculos, pulando etapas importantes para a compreensão do cálculo).

> *Há muito pouco material curricular, no curso básico de preparação de professores e matemáticos, apresentando problemas ou criando de modo a exigir o uso de uma calculadora para sua solução. A razão é fácil entender. Por um longo período na evolução histórica dos cursos de cálculo e análise, sem dúvida a componente básica dos cursos currículos de Matemática, sobreviveram apenas aqueles tópicos, exemplo e problemas que podem ser tratados sem muita "calculeira". Nós todos fomos educados com esse material, com essa atitude. Mas é nossa responsabilidade começar um processo em direção à mudança.* (D'AMBROSIO, 1986, p.72)

1.7.1 Alguns tipos de calculadoras

Dependendo da atividade profissional de cada pessoa, ou mesmo do nível de conhecimento, as pessoas escolhem um tipo de calculadora. Mas, como escolher a calculadora ideal para cada profissional ou para a sala de aula?

A resposta para esta pergunta não é algo fácil para qualquer pessoa, ou professor, pois cada caso merece um estudo a parte. Podemos começar procurando saber quais os tipos de calculadoras existentes no mercado e suas principais características.

a) mini-calculadoras de quatro operações: são calculadoras simples que operam as quatro operações básicas, mais porcentagem e raiz quadrada, possuindo em geral uma memória (podemos adicionar ou subtrair na memória).

b) mini-calculadoras científicas: são calculadoras que adicionalmente às operações básicas possuem também funções científicas de Engenharia, como função exponencial, função logaritmo, funções trigonométricas, transformações de coordenadas polares para retangulares e vice-versa, potências, raízes etc.

c) mini-calculadoras programáveis: são calculadoras que além de um conjunto de funções científicas podem armazenar uma seqüência de operações (programa) para serem executadas posteriormente.

d) mini-calculadoras financeiras: são calculadoras que possuem funções financeiras pré-programadas (cálculo de valor atual, valor futuro, taxas de juros etc).

A hierarquia algébrica no sistema algébrico operacional ou AOS (Algebric Operacional System) é uma característica essencial (bem como de outros sistemas), para a introdução de números e operações. São essas regras que determinam a prioridade das várias operações matemáticas a serem realizadas pela calculadora (ou por um computador). Sem uma prédefinição de prioridades uma expressão como 2 x 3 + 4 : 2 = (duas vezes três mais quatro divididos por dois é igual a) poderia ter vários significados como:

2 x (3 + 4) : 2 =

(2 x 3) + (4 : 2) =

2 x ((3 + 4) : 2) =

((2 x 3)+ 4) : 2 =

A hierarquia do sistema AOS (bem como o da própria Matemática, e por isso a preferência por uma calculadora com este sistema) estabelecem que a multiplicação e a divisão serão feitas antes da adição e subtração.

A hierarquia completa será :

1°. Funções matemáticas

2°. Exponencial e raízes

3°. Multiplicação e divisão

4°. Adição e subtração.

No sistema AOS o aluno poderá fazer a seguinte operação:

2 + 3 x 6 = e o resultado será 20.

No quadro deverá aparecer mais uma questão (2 + 3) x 6 =.

Quando digita na máquina de calcular, como no primeiro caso, o resultado será 20, pois o computador faz em primeiro lugar a operação de multiplicação de acordo com a precedência dada pela própria Matemática. Para fazer o segundo caso o aluno é obrigado a digitar (2 + 3) x 6 = e o resultado será 30. Os parênteses alteram a ordem de precedência e podemos escrever no quadro $\frac{5+15}{4}=$ e esperamos para ver a reação do aluno. Observamos que com isto o aluno não deixa de realizar as operações.

Isto pode mostrar que os métodos exaustivos podem ser auxiliados por uma calculadora, fazendo com que o aluno tenha que aprender principalmente as propriedades da matemática sem se preocupar com os erros cometidos nas multiplicações, adições etc (que são erros que causam uma imagem negativa da Matemática, por aparecerem justamente nos momentos nos quais o aluno está tenso, como no caso de uma prova).

Um exemplo financeiro:

João tem uma dívida a ser paga, na seguinte forma R$ 10.000,00 para 30 dias, R$ 15.000,00 para 60 dias e R$ 30.000,00 para 90 dias. Porém, ele deseja efetuar o pagamento hoje. Quanto necessita para saldar a dívida, sabendo que a taxa de juro corrente é de 5% a.m?

Solução:

$$P = \frac{10.000}{1+0,05} + \frac{15.000}{(1+0,05)^2} + \frac{30.000}{(1+0,05)^3}$$

Notemos que nesta solução, caso não se use uma calculadora, o aluno deverá levar pelo menos 15'.

Caso ele utilize uma calculadora financeira não é possível saber quais as operações utilizadas para resolver o problema (isto implica em não saber o que se está fazendo realmente). Se este mesmo aluno desejar agora utilizar um computador com uma planilha eletrônica, ele não saberá explicar a um programador o que ele deve programar.

Utilizando uma calculadora científica podemos agilizar o cálculo e ganhar tempo para mais três exemplos do mesmo tipo (o que faz com que o aluno grave o problema e não canse tanto)

1.8 Outra etapa na tecnologia em sala de aula: o computador

Neste ponto, podemos dizer que o computador é um elo que pode unir os dois métodos (Montessoriano e o Kumon) pois é possível fazer com que o aluno aprenda um assunto quando ele tem que criar um algoritmo para resolver um determinado problema. Além de simular uma série de exercícios, respeita a velocidade com que cada aluno resolve um determinado problema.

Podemos dizer que esta máquina pode ensinar (no caso dos programas tutorias). Podemos comparar estes programas com um bom livro, que na verdade é um professor sempre disposto a ensinar e explicar novamente aquele que ainda não entendeu o que está sendo ensinado. Com a vantagem de simular as situações enquanto ensina (é fato que ainda não temos uma grande quantidade de programas que funcionem com esta lógica, mas esperamos, em pouco tempo, uma grande avalanche de programas deste tipo. Sem considerar a perspectiva de programas envolvendo realidade virtual onde deverá ser possível simular e realizar qualquer experiência, sem qualquer risco.

Um computador só faz aquilo que lhe é mandado. Freqüentemente, os resultados não são exatamente o que é esperado, pois muitas vezes as pessoas não sabem definir com exatidão o que realmente querem, nem mesmo em palavras. Assim muitos problemas simples tornam-se complexos do ponto de vista da programação.

O estudante que não aprender a utilizar o computador, poderá estar condenado a aceitar os piores empregos que lhe ofereçam.

Mais cedo ou mais tarde todas as empresas estarão informatizadas.

Atualmente, é muito comum ver um engenheiro fazendo os seus cálculos através de um computador, ou um empresário fazendo gráficos demonstrativos da sua empresa. Isto não significa que não seja necessário saber Matemática, muito pelo contrário, pois a tarefa mais complicada de um gráfico é interpretar o que ele significa e depois tomar a decisão.

Devemos salientar ainda aqui que, se o engenheiro não souber calcular na mão ou o empresário não souber fazer o gráfico também terão muita dificuldade para interpretar os resultado.

Com o auxílio do computador, fazer um gráfico é relativamente simples: basta fazer um algoritmo detalhado e apropriado na linguagem de computação que se quer utilizar.

Neste momento, salientamos que o aluno deve compreender realmente o que está fazendo. Caso contrário, torna-se-lhe impossível fazer o algoritmo (anexo 3)(PC Magazine Brasil, p.181)

Como na demonstração anterior, o enigma de Diofante somente poderá ser resolvido por quem realmente conseguir entendê-lo.

1.8.1 Alguns tipos de softwares

Apresentamos a seguir alguns tipos de softwares que possuem utilizações específicas conforme o caso:

a) editores de texto são softwares para produzir textos, e estão cada vez mais sofisticados pois alguns podem corrigir a ortografia, outros podem até traduzir textos;

b) banco de dados, onde pode-se armazenar informações organizadamente;

c) planilhas de cálculo consistem em simples tabelas onde podemos realizar qualquer tipo de cálculo;

d) jogos - um divertimento - mas são os programas mais inteligentes e criativos para uma pessoa que não fez curso algum de computação mas que em pouco tempo consegue dominá-lo;

e) linguagens de programação são linguagens específicas para produção de programas;

f) programas educacionais são programas elaborados especialmente para utilização no processo ensino-aprendizagem;

Além dos programas abordados acima temos que pontuar aqueles para gerar o software multimídia. Este tipo de programa é, na verdade, a linguagem ideal para o professor. Ele possibilita que o professor produza o seu próprio software de acordo com a disciplina que ministra, podendo perfeitamente ilustrar a matéria e renova-lá de acordo com as mudanças da realidade. Sabemos que a cada ano, as disciplinas sofrem modificações a fim de estarem mais atualizadas segundo as novas realidades e os avanços do conhecimento.

Um exemplo deste tipo de programa é o TOOLBOOK'S.

1.8.2 O computador em sala de aula

Para resolvermos um problema que inclua cálculos matemáticos com a utilização do computador é necessário toda uma seqüência de passos e operações estabelecidas de modo formal, (traduzir o problema para um algoritmo) e um cuidado especial quanto ao erro causado pelos detalhes despercebidos durante uma resolução, geralmente uma exceção.

Por exemplo :

Para calcular o valor de x no problema genérico ax=b;

Um algoritmo simples seria:

```
Inicio:
     leia ( a );
     leia ( b );
     x=b/a;
     imprima x;
fim.
```

Sem o devido cuidado que o problema merece estabelecemos aqui um erro lógico.

Observamos que quando **a** e **b** são iguais a zero qualquer valor de **x** satisfaz a questão ou ainda que quando **a** é igual a zero e **b** é diferente de zero a questão não tem solução.

Um algoritmo mais elaborado poderia ser escrito da seguinte forma:

```
Inicio

     leia ( a );

     leia ( b );
```

```
Se a= 0
    então se b=0
        então qualquer valor de x satisfaz a
                                        questão;
        senão não existe valor de x que satisfaz a
                                        questão ;
    senão  x=b/a;
fim.
```

Um cuidado com um erro operacional (causado pela máquina), ou erro de truncamento.

É claro que a máquina não é perfeita e tem suas limitações, e um erro possível que a máquina pode causar sem que a pessoa perceba é em relação ao número de dígitos que o computador pode aceitar.

1.8.3 O computador e o ensino.

O poder tenderá a pertencer às pessoas que sabem.

Tudo que puder ser substituído pela máquina o será.

Como poderemos fazer melhor o que estamos fazendo ?

Crescerá quem tiver respostas, e terá respostas quem conviver em excelentes termos com o conhecimento tecnológico.

Mauro de Salles Aguiar, diretor do Colégio Bandeirantes, de São Paulo, afirma que "a Matemática é o código de lógica que precisa ser dominado para que se possa interagir no novo mundo" (EXAME, 1994, p.38).

Os programas informáticos educacionais estão invadindo as escolas e tornando a tarefa de aprender uma coisa mais simples, mais prática, mais concreta e até mesmo mais divertida. Os programas educacionais que muitas vezes se parecem mais com jogos do que com um exercício talvez possam solucinar o problema da evasão escolar por desinteresse, pois vem a escola apenas para brincar ou mesmo para satisfazer os pais.

"No meu tempo era assim".

Quem ainda não ouviu esta frase ser dita com orgulho?

Mas já nos dias de hoje é possível vislumbrar uma nova realidade onde o aprender não seja um sacrifício podendo se tornar uma diversão.

Podemos dizer que a cada momento um novo jogo é inventado usando o computador, desafiando e ensinando alguns conceitos ao mesmo tempo.

O computador estará na maioria das escolas e será um laboratório completo para as mais diversas áreas. O aluno poderá aprender com programas educacionais ou mesmo em jogos. A aula será mais atrativa.

Os recursos pedagógicos possibilitados pela tecnologia, atualmente , sugerem que

> *(...)os computadores não farão com que o estudante entenda todas as idéias. Mas podem ajudar-nos a atingir mais estudantes porque oferecem aos professores uma estratégia adicional no ensino, aquela que pode ser a única bem sucedida para um determinado estudante. Quanto maior for a gama de estratégias disponíveis, maior será o sucesso com que um professor poderá lidar com a diversidade de capacidades e estilos de aprendizagem num grupo de estudantes.* (KAHN, 1991, p.23)

Mas mesmo com estas vantagens é bom lembrar que o professor não poderá ser substituído, mas terá que ser preparado para esta nova situação. Isto não garantirá, por si só, a qualidade do ensino visto que o computador pode ajudar mas a aula ainda deverá ser bem preparada.

> *(...)os computadores não tornarão, como por um passe de mágica, mais coerente aulas que foram mal organizadas. mas os professores que têm de tomar decisões deliberadas de para onde e como usar programas específicos, devem também controlar todo o seu material. possuindo e utilizando computadores, é quase certo que os professores serão levados a falar entre si acerca do que estão a trabalhar, dos programas que melhor resultam e do que esperam conseguir através da sua utilização. Os computadores podem não resolver todos os problemas de organização e comunicação na aula, mas são decididamente um poderoso estímulo para raciocinar sobre o ensino. (idem, 1991, p.25)*

O computador pode fazer com que o aluno seja obrigado a entender a operação ao ponto de solucionar o problema com a possibilidade do aluno criar um novo algoritmo de solução do mesmo problema.

Caso haja erro na solução de algum problema em particular, podemos dizer que a falha é humana e não da máquina, pois esta só realiza as tarefas de acordo com o algoritmo dado, só que com uma velocidade muito maior que a humana.

> *A probabilidade de erros humanos existe mesmo antes de introduzirmos o computador! Tudo que podemos tentar fazer é minimizá-la. Se a demonstração é suficientemente longa e complicada, há sempre um lugar para a dúvida quanto a sua correção. Usar o computador não elimina os erros humanos, pois o próprio computador é um objeto feito pelo homem.* (DAVIS e HERSH, 1985, p.429)

A Matemática escrita tem símbolos e apresenta a dificuldade de ser manipulada. A Matemática simbólica tem como dificuldade a compreensão.

Surge agora o computador como ferramenta matemática.

Os métodos de cálculo em Matemática sempre dependeram dos símbolos (métodos de escrita) do mesmo modo a linguagem da Informática pode permitir que surjam novos conceitos matemáticos, já que "... o uso de computadores e de informática exige mais matemática, melhor compreendida, e levada a um novo equilíbrio entre a 'pura' e a 'aplicada'" (D'AMBROSIO, 1986, p.108).

Além de ser uma ferramenta matemática, o computador pode ser um elemento de aproximação entre duas culturas.

> *Sei que o humanista pode achar questionável que uma "tecnologia" possa mudar seus pressupostos sobre o tipo de conhecimento é relevante para a sua prespectiva de compreenção das pessoas. E, para o cientista, a diminuição do rigor pela intromissão do "tolo" pensamento humanista pode ser não menos ameaçador. Entretanto, acho que a presença do computador pode plantar sementes que conseguiram gerar uma cultura epistemológica menos dissociada.* (PAPERT, 1985, p.59)

2 METODOLOGIA

2.1 O procedimento de pesquisa

Desenvolvemos o estudo com a população discente de terceiro grau, dos cursos de Bacharelado em Informática, Administração e Ciências Contábeis.

Elegemos o delineamento em pesquisa exploratória por constituir-se de uma primeira etapa de uma investigação mais ampla, no caso, o uso da calculadora no processo pedagógico nas aulas de Matemática do terceiro grau.

Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar uma visão geral, tipo aproximativa, acerca de um determinado fato (GIL, 1991, p.38).

O conhecimento que o pesquisador tem do tema objeto de estudo é o que determina seu procedimento na coleta de dados. Como a utilização do instrumental tecnológico está gerando polêmicas dentro da academia, já que existe a crítica para esta mecanização, como perda do raciocínio lógico-matemático (ao não precisar resolver "no lápis" o problema matemático), optamos pela exploração de tal circunstância em sala de aula, para definição de um posicionamento mais específico de estudo.

A tecnologia se nos impõe este posicionamento.

> *Qualquer que seja o método escolhido, deve ser usado de maneira flexível. À medida que o problema inicialmente definido de maneira vaga se transforma em problema com sentido mais precisamente definido, são necessárias freqüentes mudanças no processo de*

pesquisa, a fim de permitir a obtenção de dados significativos para as hipóteses emergentes. (SELLTIZ, 1973, p.62)

O objetivo geral deste estudo é mostrar que o uso da tecnologia disponível é indicada para a resolução de problemas de Matemática; não prejudica a aquisição de conceitos básicos e/ou algoritmos do cálculo, muito pelo contrário, **a tecnologia promove a qualidade do ensino da Matemática de 3° grau.**

Este pressuposto norteia a pesquisa, pois

> *A significância do resultado de um teste de hipótese não é determinada pela sua evidente comprovação, praticidade ou mesmo logiocidade. A significância é determinada pela probabilidade de a hipótese ser verdadeira. Uma vez que o pesquisador deseja generalizar os fenômenos que acredita existir na população, ele busca certificar-se de que os fenômenos observados não aconteceram por mero acaso. E é aqui que entra a probabilidade.* (ESPÍRITO SANTO, 1992, p.61)

O objetivo geral que norteia o estudo refere-se ao domínio de algoritmo necessário para a tecnologia do século 21, qual seja:

Caracterizar o domínio de algoritmos aprendidos no 1° e 2° grau que favorecem a plena utilização de tecnologia no 3° grau.

Os objetivos específicos decorrentes desta proposta são:

1. Relacionar o aprendizado de 1° e 2° graus com a facilidade realização de cálculos matemáticos necessários ao aprendizado do 3° grau.

2 METODOLOGIA

2.1 O procedimento de pesquisa

Desenvolvemos o estudo com a população discente de terceiro grau, dos cursos de Bacharelado em Informática, Administração e Ciências Contábeis.

Elegemos o delineamento em pesquisa exploratória por constituir-se de uma primeira etapa de uma investigação mais ampla, no caso, o uso da calculadora no processo pedagógico nas aulas de Matemática do terceiro grau.

Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar uma visão geral, tipo aproximativa, acerca de um determinado fato (GIL, 1991, p.38).

O conhecimento que o pesquisador tem do tema objeto de estudo é o que determina seu procedimento na coleta de dados. Como a utilização do instrumental tecnológico está gerando polêmicas dentro da academia, já que existe a crítica para esta mecanização, como perda do raciocínio lógico-matemático (ao não precisar resolver "no lápis" o problema matemático), optamos pela exploração de tal circunstância em sala de aula, para definição de um posicionamento mais específico de estudo.

A tecnologia se nos impõe este posicionamento.

> *Qualquer que seja o método escolhido, deve ser usado de maneira flexível. À medida que o problema inicialmente definido de maneira vaga se transforma em problema com sentido mais precisamente definido, são necessárias freqüentes mudanças no processo de*

> *pesquisa, a fim de permitir a obtenção de dados significativos para as hipóteses emergentes.* (SELLTIZ, 1973, p.62)

O objetivo geral deste estudo é mostrar que o uso da tecnologia disponível é indicada para a resolução de problemas de Matemática; não prejudica a aquisição de conceitos básicos e/ou algoritmos do cálculo, muito pelo contrário, **a tecnologia promove a qualidade do ensino da Matemática de 3° grau.**

Este pressuposto norteia a pesquisa, pois

> *A significância do resultado de um teste de hipótese não é determinada pela sua evidente comprovação, praticidade ou mesmo logiocidade. A significância é determinada pela probabilidade de a hipótese ser verdadeira. Uma vez que o pesquisador deseja generalizar os fenômenos que acredita existir na população, ele busca certificar-se de que os fenômenos observados não aconteceram por mero acaso. E é aqui que entra a probabilidade.* (ESPÍRITO SANTO, 1992, p.61)

O objetivo geral que norteia o estudo refere-se ao domínio de algoritmo necessário para a tecnologia do século 21, qual seja:

Caracterizar o domínio de algoritmos aprendidos no 1° e 2° grau que favorecem a plena utilização de tecnologia no 3° grau.

Os objetivos específicos decorrentes desta proposta são:

1. Relacionar o aprendizado de 1° e 2° graus com a facilidade realização de cálculos matemáticos necessários ao aprendizado do 3° grau.

2. Estabelecer a ocorrência da criatividade para os diversos cálculos, como a correlação com o domínio do ensino básico.

A utilização de variáveis busca relacionar causas através da manipulação e observação das conseqüências e efeitos desta manipulação. O uso da calculadora na resolução do instrumento de pesquisa pelo grupo estudado é a manipulação da *variável independente*, que "é aquela que influencia, determina ou afeta outra variável" (ESPÍRITO SANTO, 1992, p.47). Já a *variável dependente* é a consequência ou efeito determinado pela variável independente, qual seja, a relação entre o **tempo, origem do ensino básico de 1° e 2° grau** e o **grau de acertos** nos grupos explorados.

> *"Na pesquisa ex post facto, a manipulação de variáveis independentes não é possível. Esta é a característica fundamental da pesquisa não-experimental: variáveis independentes chegam ao pesquisador como estavam, já feitas.(...) Em muitas pequisas não-experimentais observamos y, a variável dependente e depois 'voltamos' para encontrar o x ou os xx que provavelmente tenham influenciado y"(KELINGER, 1980, p.131).*

Para ESPÍRITO SANTO (1992, p.49), "mesmo quando o pesquisador tem grande experiência com o assunto de sua pesquisa, ele raramente consegue controlar ou até identificar todas as variáveis intervenientes ou exógenas".

2.2 Operacionalização da pesquisa

Primeiramente elaboramos o instrumento de pesquisa (anexo 4) trabalhando as questões postas para a realidade docente sobre **o instrumental tecnológico como recurso pedagógico**, ressaltando a compreensão dos alunos na utilização da tecnologia em sala de aula, com as diferentes qualidades de ensino de escolas. A sua elaboração constituiu-se com a realização de um pré-teste do instrumento em amostra selecionada para tal.

As questões 1 e 2 servem para determinar a origem do ensino de 1° e 2° grau, já que solicita a identificação do tipo de escola básica de formação primária e secundária.

A questão 3 verifica o nível de ensino de formação profissional - podendo ser de orientação geral ou profissionalizante.

A iniciação ao uso da tecnologia na Matemática foi questionada na questão 4, ao perguntarmos ao aluno sobre o uso da calculadora no 2° grau. Tanto que, na questão 5, ele deve avaliar seu potencial para resolução do teste apresentado no questionário.

A questão 10 não é comum, pois, ao invés de perguntar sobre sua resolução, investiga o potencial criativo do aluno, que ainda não tem um modelo preestabelecido da matemática de 1° e 2° grau de como resolver o exercício proposto, devendo achar uma forma lógica de afirmar qual a linha que contém erro.

As questões 6, 7, 8, 9, 11 e 12 são demonstrativas do conhecimento dos alunos de Matemática necessária ao aprendizado de 3° grau, que promova a sua entrada na tecnologia do século 21.

O tipo de amostra **não-probabilística**, **por tipicidade** determina casos que

> *(...)por considerações de diversas ordens impedem a escolha de uma amostra probabilística, ficando a cargo do pesquisador a tentativa de buscar, por outras vias, uma amostra representativa. Uma das formas é procurar um subgrupo que seja típico, em relação a população como um todo. Segundo as palavras de Ackoff (1967:161), "tal subgrupo é utilizado como* ***barômetro*** *(grifo nosso) da população. Restringem-se as*

observações a ele e as conclusões obtidas são generalizadas para o total da população". (MARCONI, LAKATOS, 1992, p.48)

A amostra foi investigada em cinco turmas do primeiro período letivo e uma do terceiro período, sendo considerado para tal eleição **a falta de contato pedagógico com o pesquisador**. Quantitativamente ficaram assim distribuídas:

Curso	Período	Turno	Número de alunos
Informática	1°	noturno	60
Administração	1°	diurno	105
Administração	1°	noturno	53
Contábeis 2	2°	noturno	39

A coleta de dados ocorreu com tempo limitado para dimensionar no aluno investigado seu grau de dificuldade para resolução ou não das questões propostas. Para tal, utilizamos o tempo de duas horas-aula para cada turma investigada.

Por outro lado, o tempo entre a entrega e a devolução do instrumento de pesquisa foi anotado em cada um dos casos, diretamente pelo investigador.

As turmas foram divididas em dois subgrupos segundo a disponibilidade de calculadoras já adquiridas por solicitação de material pedagógico no início do ano letivo. Em um dos subgrupos da sala ficaram os casos que se utilizaram de calculadoras para responder o instrumento de pesquisa, sendo que no outro subgrupo ficaram posicionados aqueles casos sem calculadoras.

As instruções para resolução do questionário foram dadas de maneira uniforme, segundo o roteiro abaixo:

1. Objetivo da pesquisa: "Esta pesquisa tem o objetivo de caracterizar a influência no ensino de 1° e 2° graus da utilização de uma calculadora".

2. Garantia de anonimato para o aluno investigado: "não é para colocar o nome nos questionários, não tendo nem mesmo local específico para isto".

3. Função de investigador do professor: "após iniciado, por todo o grupo, a resolução das questões, a função do professor é só de cronometrar o tempo de conclusão de cada um dos casos, anotando-os no cabeçalho superior direito".

4. A interpretação pessoal das questões: "a interpretação de cada questão é inerente ao estudo em questão".

5. A seriedade do evento: "solicitação de seriedade na resolução, bem como a impropriedade da busca de ajuda por meios que não os convencionados para tal".

2.3 Resultados da pesquisa

Apresentamos, a seguir, os dados obtidos na coleta proposta anteriormente, considerando-se que a amostra investigada tornou possível a sua operacionalização.

TABELA 1 - ANÁLISE DAS QUESTÕES 1 À 5

		Tabela para análise das questões de 1 à 5			
Questões	Respostas	Com Calculadora	Sem Calculadora	Análise	
		P	P	Z	Prob
1	Particular	37,32%	43,36%	-0,913	18,05%
	Pública	44,74%	37,76%	1,13	12,92%
	Misto	17,54%	18,88%	-0,276	39,15%
2	Particular	51,57%	52,45%	-0,111	45,60%
	Pública	38,60%	34,27%	0,718	23,64%
	Misto	9,65%	13,29%	-0,902	18,35%
3	Ed. Geral	37,72%	28,67%	1,536	6,22%
	Profis.	59,65%	69,93%	-1,721	4,26% *
4	Aprendeu a utlizar a calc.	11,4%	7,69%	1,016	15,49%
	Não aprendeu a utilizar a calc.	88,60%	91,61%	-0,895	20,91%
5	Sabe utilizar a calc.	63,16%	47,55%	2,496	0,63% *
	Não sabe utilizar a calc.	26,32%	37,06%	-1,83	3,36% *
	Não resp	10,53%	15,38%	-1,142	12,67%
	Número de questionários	114	143		

A diferença entre as percentagens estatisticamente significativas aparecem na questão 3, a diferença entre os alunos com formação profissional que fizeram o teste com calculadora e aqueles que o realizaram sem calculadora pode ser significativo, influenciando no resultado em favor dos que não utilizaram a calculadora no teste.

Na questão 5, na qual a diferença significativa apareceu tanto para os elementos da amostra que acham que sabem utilizar a calculadora e os que não sabem.

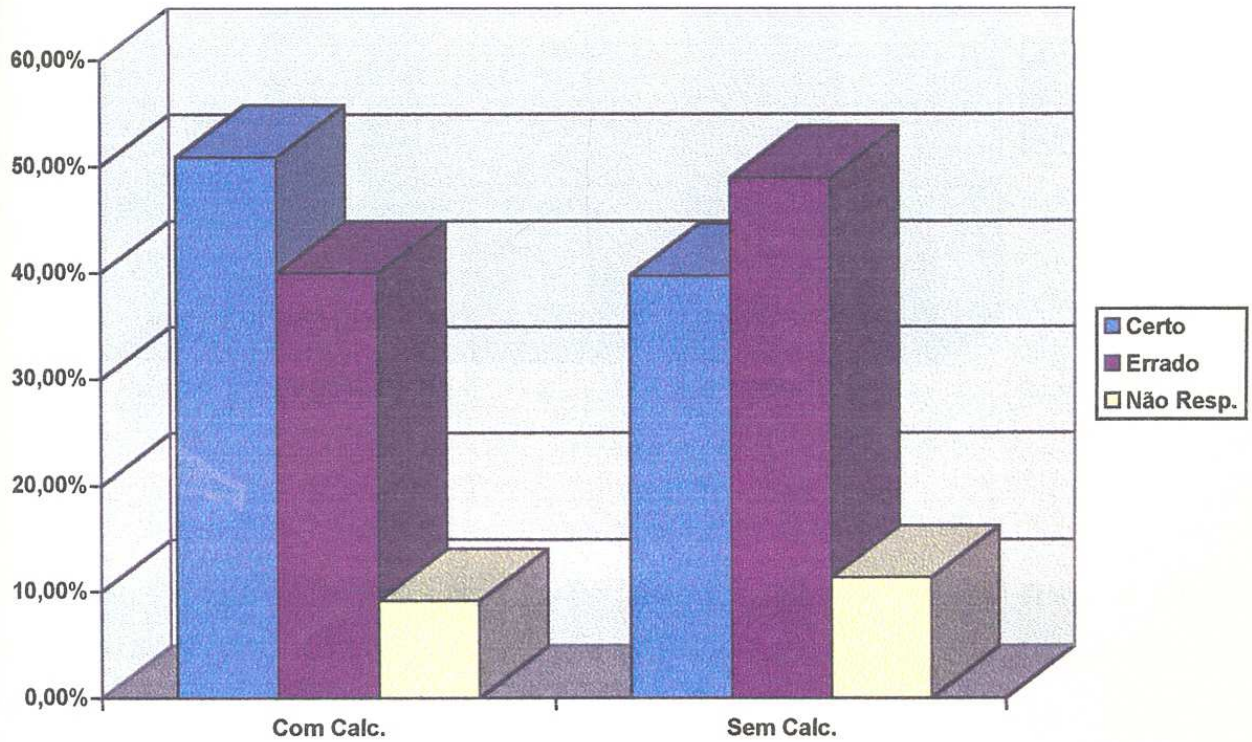
Notamos que a formação dos alunos pesquisados, praticamente, não influenciou nos resultados.

TABELA 2 - ANÁLISE DAS QUESTÕES 6 À 11

		Tabela para análise das questões de 6 à 11			
Questões	Respostas	Com Calculadora	Sem Calculadora	Análise	
		P	P	Z	Prob
6,7,8,9,11	Certo	50,88%	39,72%	3,997	0,32% *
	Errado	40,00%	48,95%	-3,204	0,07% *
	Não Resp.	9,12%	11,33%	-1,29	9,86%
10	Certo	21,05%	14,69%	1,334	9,10%
	Errado	67,54%	72,03%	-0,78	21,78%
	Não Resp.	11,40%	13,29%	-0,454	32,48%
	Número de questionários	114	143		

Apresentamos o gráfico abaixo para visualizar os aspectos significativos referentes as porcentagens dos acertos e erros das questões 6, 7, 8, 9 e 11.

GRÁFICO 1 - ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 6,7,8,9 e 11

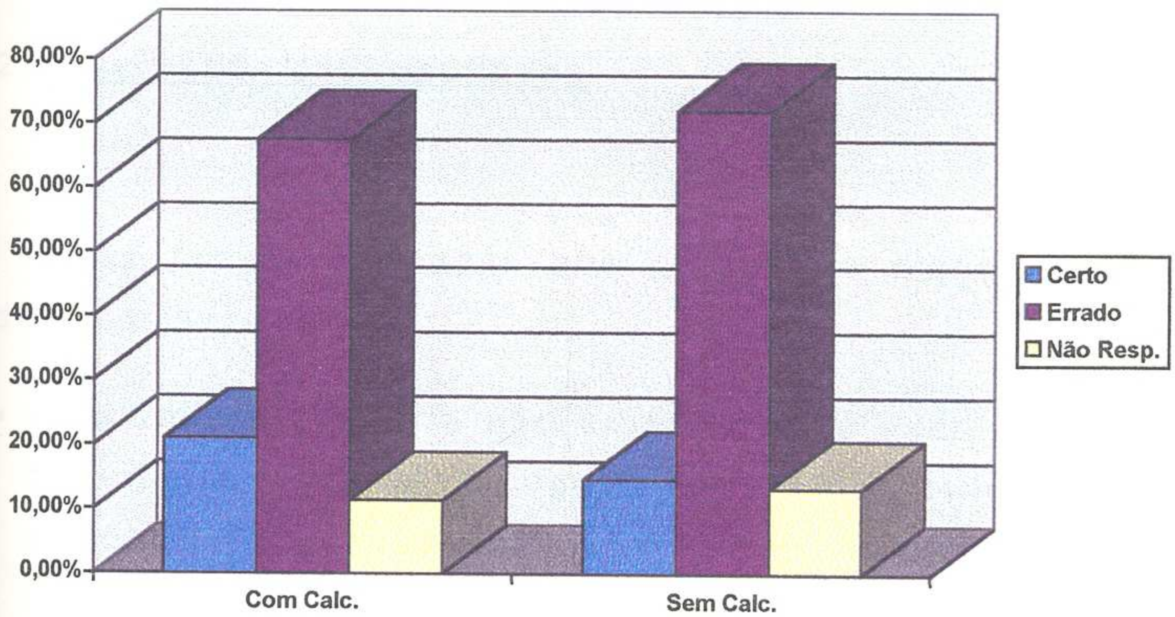


* A diferença entre as porcentagens estatisticamente significativas referentes as questões 6, 7, 8, 9 e 11, que são questões de Matemática a nível de 1° grau, a

calculadora tem uma influência favorável para os que usaram a calculadora tanto no número de acertos como no número de erros. É interessante observarmos que o número de alunos que não responderam tem uma diferença não significativa estatísticamente; isto porque os alunos que não sabem resolver as questões não as resolvem com ou sem a máquina.

Em relação a questão 10, onde o que investigamos é o nível de raciocício da lógica matemática para a sua resolução, identificamos que o número de acertos e de erros entre os elementos da amostra são muito parecidos, como constatamos no gráfico abaixo:

GRÁFICO 2 - ACERTOS E ERROS NA QUESTÃO 10



No caso especial da questão 11 observamos que a maioria dos alunos calcularam as raízes da equação do segundo grau. Porém não resolveram a questão da forma pedida. Isto pode revelar um saber mecânico.

Tempo médio gasto pelos alunos para a resolução do instrumento de pequisa.

Com calculadora	36,94'
Sem calculadora	39,345'

Neste caso não houve uma diferença significativa em relação para a resolução do teste por completo. Poderiamos dizer que isto ocorreu porque os alunos, que resolveram o teste com a calculadora, gastaram uma boa parte do tempo tentando resolver a questão 10.

2.4 Discussão dos resultados

As provas aplicadas aos grupos de alunos selecionados demonstram que:

- os alunos na maioria não aprenderam a usar nenhum tipo de tecnologia, embora se julguem capazes de utilizar calculadora no momento de responder um teste de conhecimento;
- os resultados da prova aplicada aos dois grupos (com e sem o recurso da calculadora) evidenciam que os alunos que utilizaram a máquina tiveram maior número de acerto do que os que não fizeram uso dessa tecnologia;
- o número de questões que ficaram sem resolução não representa diferença estatisticamente significativa, quando considerados os grupos que usam a calculadora e os que não a utilizam. Este resultado pode significar que a tecnologia por

si só não melhora o desempenho de alunos, se esses não possuírem os conhecimentos básicos.

- em relação ao tempo que cada grupo usou para a resolução das provas observa-se, pelos resultados estatísticos, que não houve predominância significativa em nenhum dos grupos.
- o item 10 da prova, que exige um raciocínio teórico para sua resolução, demonstra que a influência da tecnologia não é significativa em tais casos;
- Os itens 12 e 13 permitem que se discuta o nível de informação e/ou conhecimento de informática que os alunos de 3º grau apresentam ao ingressar na universidade.

CONCLUSÃO:

A bibliografia consultada evidencia a resistência que, em geral, os professores demonstram em relação ao uso de tecnologias educacionais eletrônicas. Talvez essa resistência seja devido a diversificação de linguagens e símbolos que os percursores das tecnologias utilizam.

Alguns dos autores pesquisados, como KAHN e D'AMBRÓSIO, afirmam que a tecnologia em si mesma não garante o sucesso do professor de Matemática em sala de aula.

A dificuldade que muitos alunos apresentam na aprendizagem da Matemática no 3° grau pode ser atribuída à formação deficiente do professor de 1° grau.

A Matemática aplicada a uma situação real pode ser mais simples de ser compreendida (tornando-se concreta, a Matemática permite melhor visualização do problema), afinal o aluno sabe o que está procurando.

Todos os dias, comerciantes e banqueiros estão inventando novas formas de financiamento (a fim de aumentar os lucros): são juros antecipados, juros postecipados, descontos imediatos, descontos sobre descontos, juros com capitalização mensal, com capitalização diária, taxa comercial, taxa exata. Tudo isto pode ser explicado em sala de aula durante o estudo de progressão aritmética e progressão geométrica. Assim, podemos preparar melhor o aluno com situações práticas que poderá encontrar no seu dia a dia.

Mas a Matemática Financeira não é a única que causa problemas, existe ainda a Estatística, em que é possível encontrar livros como o título "Como mentir com a estatística". A revista Exame explora o assunto na reportagem homônima: "Como mentir com a estatística"

Os números citados nas matérias da grande Imprensa parecem verdades absolutas, pois são o resultado de uma "pesquisa". O problema é que estes números em uma outra pesquisa concorrente não são muito parecidos.

"Para o Ipea, por exemplo, são 32 milhões de miseráveis enquanto para Lula, candidato a presidência do PT, essa quantidade é duas vezes maior." (revista Exame)

Isto pode ocorrer devido a um detalhe, como, por exemplo, um erro de amostragem.

Aprender Matemática usando a tecnologia é a questão. Sendo assim, não é demérito nenhum usá-la até mesmo para simples adições. É claro que é necessário saber operar o equipamento. Por exemplo: usar uma máquina de calcular é algo simples, desde que o seu dono saiba como resolver o problema em questão sem a mesma, pois ela não resolve os exercícios sem os comandos certos. Seria como ter um carro e não saber para onde ir.

Poderíamos imaginar que a calculadora pode gerar o erro. Pode ser muito fácil apertar um botão errado, porém é possível observar - pelo teste aplicado - que isso não acontece com freqüência na prática. Mais comum do que a máquina incitar o erro, é o aluno não saber operará-la. Os equívocos nas operações feitas "de cabeça" (mesmo que simples adições ou subtrações) são bem mais freqüentes que a digitação errada das teclas. Quando os caixas de supermercado registram as compras com as máquinas registradoras, é provável que o operador cometa um número muito pequeno de erros. E, certamente, sabe qual operação matemática está realizando.

Com a informática a nosso favor, muitos dados importantes são transformados de forma quase imediata. O censo sem a informática, não atingiria o seu objetivo como elemento importante para o planejamento da nação, pois quando os dados terminassem de ser compilados, talvez já fosse necessário fazer um novo censo.

Podemos sonhar com a informática dando os resultados de uma eleição quase imediatamente após o pleito, tornando desnecesário convocar tantas pessoas para fiscalizar e apurar.

Ou ainda facilitar a obtenção de importantes informações a respeito de um determinado assunto. Uma tese poderá ser trabalhada em paralelo por uma pessoa no Brasil e uma na França por exemplo, possibilitando a troca de informações. Um texto publicado na Alemanha poderá ser traduzido por um computador e finamente interpretado por um brasileiro. Isto tudo não é futuro. Já está acontecendo. Neste momento, o importante é absorver a tecnologia para aperfeiçoá-la e repassá-la.

É o caso da Internet, a rede de computadores mundial, onde as mais diversas informações estão diponiveis. Para a tradução de textos, já existem programas como o "fala de tudo", que é capaz de traduzir textos do alemão, do inglês, do francês e do espanhol para o português. É claro que estes programas de tradução ainda não são perfeitos, fazendo transcrições ao "pé da letra" e por isso mesmo necessitam, ainda, de uma pessoa para realizar entre uma tradução literal ao real signifcado dos termos.

Sem o computador, tudo o que foi citado não seria possível. Seria simplesmente mais lento, o que não condiz com a necessidade do momento, que exige cada vez mais rapidez e precisão.

A tecnologia pode levar uma aproximação entre a realidade e a teoria de sala de aula pois, da pré-escola à universidade, o objetivo agora é aproximar o ensino do cotidiano do aluno. E este cotidiano está sendo invadido pela tecnologia.

Recomendações:

1) A pesquisa evidencia a necessidade de padronização das linguagens e símbolos utilizados pelos autores de livros didáticos de software para Matemática.

2)Os professores de Matemática devem promover a interação entre a Matemática-ciência e a Matemática-atividade-prática, pois a história da Matemática demonstra que os cálculos surgiram pelas necessidades das aplicações;

3) É urgente o estudo do currículo de formação de professores pelas universidades, bem como a introdução da tecnologia eletrônica para a educação tanto na formação do professor como na sua utilização em sala de aula de 1°, 2° e 3° graus;

4) As universidades devem equipar laboratórios para produção de softwares educativos.

5) Sugestão ao ensino do uso do computador e da máquina de calcular científica:

- É necessário mostrar um histórico, antes mesmo de apresentar as conclusões ao aluno.

- A criatividade deve ser desenvolvida, e deve ocupar o espaço central na aprendizagem.

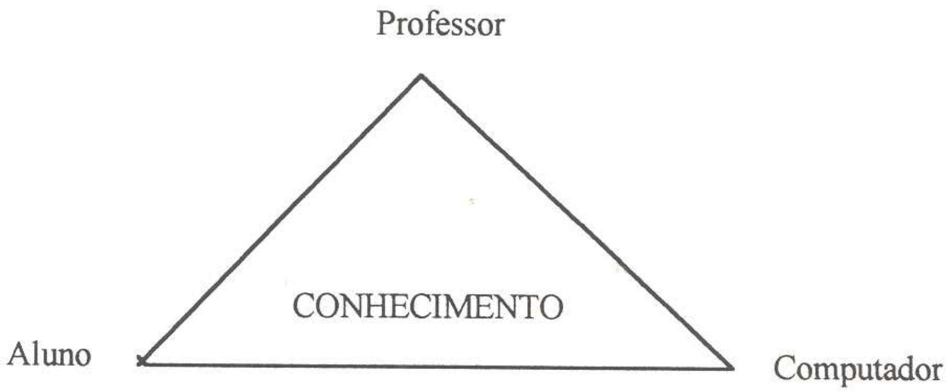
- Uma das melhores formas de aprendermos computação é sabermos alguns conceitos básicos e depois procurar usá-los, descobrindo aos poucos o que eles podem oferecer de novo, além de ler manuais, é claro.

Este será o objetivo de cada professor num breve futuro: despertar o interesse de seus alunos para entrar no mundo da ciência. Se isto acontecer, os professores do futuro terão que ser muito melhores, pois os alunos poderão descobrir coisas novas por si mesmos e serem, por isso, mais questionadores (uma coisa que sempre digo é que ensinar é muito mais fácil que aprender, pois quando se ensina só se ensina o que se sabe; porém quando se aprende, só se aprende aquilo que não se sabe).

A tecnologia permite que os cálculos sejam feitos de forma mais rápida e de diferentes maneiras, e à frente de tudo isto está o algoritmo. Não significa que os velhos métodos de ensino da Matemática estejam errados ou sejam ineficientes, mas sim que uma nova porta cheia de possibilidades surgiu. O mundo que esta nova porta nos abre é ainda desconhecido e cabe a nós saber unir o velho ao novo e ainda quem sabe,... criar.

Afinal, os cálculos de outrora impraticáveis hoje são possíveis graças à transformação dos instrumentos. Era - antes do advento do computador - impensável realizar uma multiplicação de números elevados, somando-os várias vezes.

Seria um processo moroso. No entanto, a "velocidade dos bytes" torna o método possível e talvez mais fácil de ser realizado e aplicado.



Uma sugestão poderia ser uma nova forma de ensino onde a preocupação seja fazer com que o aluno entenda o que está calculando, saiba que tipo de resultado procura, e quem sabe ele próprio crie um novo algoritmo. Para isto, a solução pode ser a calculadora e o computador.

A tecnologia pode ajudar, mas é necessário lembrar que não bastam novos instrumentos e recursos. Os novos professores precisam estar ajustados a essa nova realidade mesmo porque, caso contrário, pode-se estar preparando um excelente profissional para o século XIX, um pequeno erro para quem está pensando no século XXI.

ANEXO 1

O Ponto de Ouro, Sua Beleza e Seu Mistério

Aqui, oferecemos ao leitor pequeno estudo elementar do ponto de ouro, estudo esse que é feito de forma rigorosamente didática. Trata-se de problema geométrico famoso, de rara beleza, que interessa especialmente aos estudantes e aos artistas.

Abordamos, assim, um capítulo da matemática elementar de um ponto de vista superior. Era essa, precisamente, a preocupação que norteava a obra de Felix Klein (1925-1949), geômetra alemão, apontado como professor modelar.

O esclarecido e famoso filósofo inglês Alfred North Whitehead (1881-1947) foi levado a afirmar que a *Matemática é a mais original criação do espírito humano*.

Esse aforismo do sábio logicista só poderia parecer fantasioso, ou exagerado, para aqueles que vivem totalmente alheios às belezas e aos prodígios da chamada Ciência de Lagrange (1736-1813).

Nos domínios da mais pura e elevada Fantasia, a Matemática é um amontoar contínuo, maravilhoso, de surpresas, de problemas vivos e curiosos, de teorias espantosas, de sutilezas filosóficas que nos deslumbram.

Com suas pesquisas, o matemático estuda os átomos e desvenda os segredos dos espaços infinitos; permite ao homem ir à Lua e medir com rigor o peso do pingo da letra *i* quando escrita com tinta verde, numa folha de papel.

Deixemos, porém de despejar o caçuá de nossos elogios sobre a Ciência que Leibniz, o filósofo, considerava como a "honra do espírito humano".

Vamos abordar hoje um dos mais famosos problemas da Geometria, ou melhor, da Arte: *O Problema do Número de Ouro.* O nosso estudo será feito de forma bastante elementar, bem simples e essencialmente didática. Aí é que está.. Didática acima de tudo. Não nos esqueçamos do que escreveu Sylvester (1814-1897), um dos maiores geômetras do século XVIII:

A Matemática é a Música do Raciocínio.

Iniciemos, pois, o de uma nosso estudo. Tomemos um segmento *AB*, isto é, uma porção limitada *AB* reta:

Um segmento AB pode ser dividido em duas partes desiguais de uma infinidade de maneiras por um ponto S.

Iniciemos, pois, o de uma nosso estudo. Tomemos um segmento *AB*, isto é, uma porção limitada *AB* reta:

Com um ponto *S*, marcado sobre *AB*, podemos dividir esse segmento *AB* em duas partes. Essas partes são *AS* e *SB*.

O ponto *S* - diz o matemático - marcado sobre *AB* pode ocupar uma infinidade de posições. Há, portanto, uma infinidade de maneiras de dividir o tal segmento *AB* em duas partes.

Se o ponto *S* coincidir com o ponto extremo *A*, o segmento *AS* será nulo. O seu comprimento será zero. A outra parte *SB* (nesse caso particular) será o próprio segmento *AB*.

Isso do ponto *S* coincidir com o extremo *A*, ou com o extremo *B*, são casos anômalos, que não interessam ao nosso problema.

Observação importante:

Tracemos um segmento *AB* e assinalamos um ponto *F* no prolongamento de *AB*:

Caso em que o segmento AB é dividido em duas partes por um ponto F de seu prolongamento.

Para o matemático o ponto *F* (mesmo estando fora de *AB*) divide *AB* em duas partes: *AF* e *FB*. Mas a parte de *FB*, como é contada para a esquerda, é *negativa*. A soma da parte positiva (*AF*) com a parte negativa (*FB*) é igual ao segmento *AB*.

Podemos escrever: $AF + (-FB) = AB$.

Para o leigo o ponto *F* não divide *AB* em duas partes, mas para o geômatra o ponto *F*, como acontecia antes com o ponto *S*, divide *AB* em duas partes.

Quando o ponto *F* está no prolongamento do segmento dizemos *que esse ponto divide o segmento em partes subtrativas*.

Vamos supor, para melhor encaminhar o nosso estudo, que o segmento *AB* foi dividido pelo ponto *S* em duas partes desiguais e ambas positivas. Assim sendo é claro, é claríssimo, haverá *uma parte maior e outra parte menor*.

Temos, assim, para enredo da nossa história, três personagens distintas e que devem ser bem conhecidas:

O segmento todo	*AB*
a parte *maior*	*AS*
a parte *menor*	*SB*

Que irão fazer essas três personagens em busca de um *ponto*, sim, em busca do chamado *ponto de ouro*?

O matemático, sempre inquieto e curioso, preocupado com fórmulas e cálculos, pensa logo em achar a *razão* entre *o todo* e *a parte maior*, e também a *razão* entre a *parte maior* e a parte *menor*.

Razão, para o matemático, é o quociente, é a divisão.

Para achar tais *razões*, que tanto interessam ao matemático, é preciso medir as duas partes. Medi-las com o necessário cuidado.

Digamos que o *todo* mede 80 cm e que as duas partes medem, respectivamente, 60 e 20 centímetros.

A *razão* do todo (80) para a parte maior (60) será dada pelo quociente da divisão de 80 por 60. Esse quociente é 1,33 (aprox.)

A razão da parte maior (60) para a parte menor (20) será dada pelo quociente de 60 por 20. Esse quociente é 3.

Em outras palavras: As razões calculadas são: 1,33 e 3. A segunda razão é bem maior do que a primeira.

À razão por quociente os matemáticos dão o nome bastante expressivo: *razão geométrica.*

A razão geométrica entre dois segmentos *AS* e *SB* é um número *puro*, um número *abstrato* - denominação que alguns analistas ortodoxos não aceitam.

Essas duas razões são, pelo matemático, denominadas *razões segmentárias principais.*

As razões segmentárias principais são, portanto:

1ª) Razão entre o *todo* e a parte *maior*;

2ª) Razão entre a parte *maior* e a parte *menor*.

Precisamos fixar bem claramente.

Será interessante, dentro do roteiro que vamos seguindo, fazermos mais um exemplo.

Tomemos um segmento de 79 cm.

Vamos supor que esse segmento é dividido em duas partes desiguais.

Sendo:

Parte maior:	49 cm.
Parte menor:	30 cm

As razões segmentárias principais são:

70/49 = 1,6
49/30 = 1,6

Observem com atenção os resultados.

As duas razões principais são iguais. Com efeito. A primeira é 1,6; a segunda é, também, 1,6.

Diríamos que houve, nesse caso, notável coincidência: As duas razões segmentárias principais são iguais.

Quando as duas razões segmentárias são iguais, o matemático sorri orgulhoso, passa a mão pela tesa e diz com certa ênfase:

Essa divisão do segmento *AB* foi feita em *média e extrema razão.*

Convém repetir:

- *Divisão em média e extrema razão.*

Qualquer adolescente, ao ouvir isso, diria risonho, sem hesitar:

Que nome bacana! É legal às pampas!

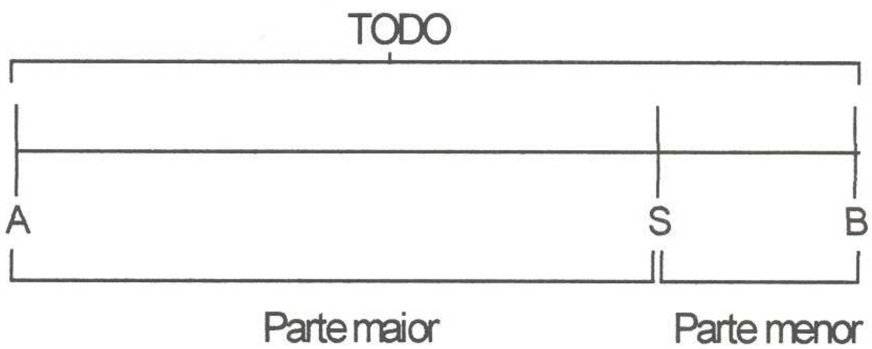
Sim, não resta dúvida, esse nome bastante expressivo é consagrado por todos os matemáticos.

É tão bem imaginado que vão que vai nos permitir formular a seguinte definição:

- Dividir um segmento *AB* em *média e extrema razão* é dividi-lo em duas partes tais, *AS* e *SB*, que o *todo* (*AB*), dividido pela parte maior (*AS*), seja igual à parte *maior* dividida pela parte *menor*.

Escrevemos simbolicamente:

$$\frac{\text{TODO}}{\text{PARTE MAIOR}} = \frac{\text{PARTE MAIOR}}{\text{PARTE MENOR}}$$



Um ponto S divide o segmento AB em duas partes desiguais: Parte maior e parte menor.

Repare que a parte maior é uma *média* entre o todo e a parte menor; a razão é extrema porque não existe, no caso, outra solução da qual resulte a igualdade entre as razões segmentárias. É, para o ponto *S*, uma posição extrema. E daí resulta a denominação: *média e extrema razão.*

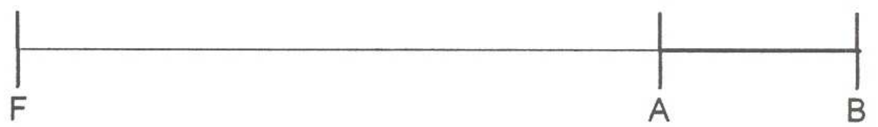
Esse ponto que divide o segmento *AB* em média e extrema razão é chamado *ponto de ouro* do segmento *AB*.

Estando o *ponto de ouro* no segmento diremos que o *ponto de ouro é interno.*

E, nesse caso, o maior segmento (*AS*) é chamado *segmento áureo interno* ou, apenas, *segmento áureo.*

Outra observação importante:

Vamos supor que um segmento de 80 cm (por exemplo) foi dividido por um ponto *F* em dua partes subtrativas. Uma *AF*, negativa, de 130 cm e outra, *FB*, positiva, de 210 cm:



O ponto de ouro *externo* fica no prolongamento do segmento.

Vamos calcular as razões.

As razões entre o segmento *AB* e a parte subtrativa *(AF)* serão:

$$\frac{80}{-130} = -0{,}61$$

A razão entre a parte subtrativa *(AF)* e a positiva *(FB)* será:

$$\frac{-130}{210} = -0{,}61$$

Vemos, ainda nesse caso, que as razões sào iguais. Podemos, pois, dizer que o ponto *F* divide *AB* em *média e extrema razão*. O segmento *AF* é chamado *segmento áureo externo*.

O problema da *média e extrema razão* (diz o matemático) é problema de 2° grau e, por isso, admite duas soluções: uma positiva e outra negativa. No presente estudo só consideramos a solução positiva, isto é, apreciaremos o segmento áureo *interno*.

E agora, terminada essa conversa sobre a divisão em *média e extrema razào*, vamos contar uma história bastante curiosa.

Há muitos séculos passados, um frade italiano que era geômatra, chamado Lucas Pacioli (1445-1514), descobriu uma coisa que lhe pareceu bastante singular:

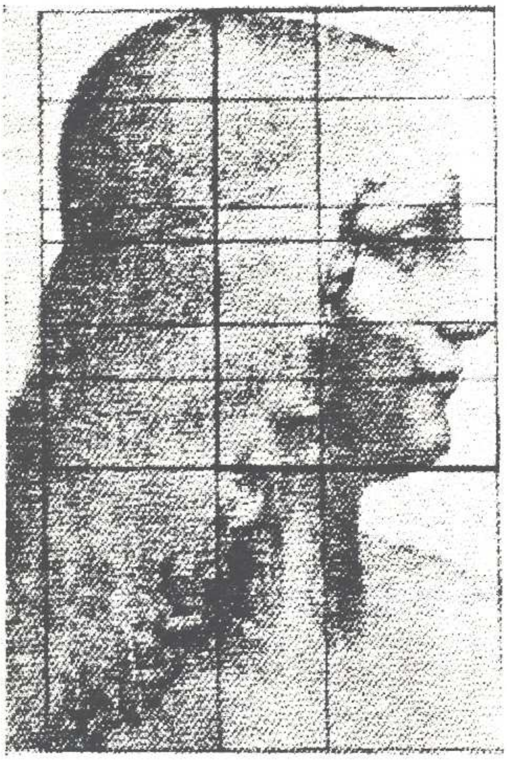
Entre todas as maneiras de se dividir um segmento em duas partes desiguais, há uma - e uma só - que parece mais harmoniosa, mais agradável, mais de acordo com a estética, diríamos até mais poética, mais suave do que as outras.

Para o tal ponto S no segmento AB, há uma posição privilegiada, que se destaca no meio de uma infinidade de posições.

Frei Lucas Pacioli ficou impressionado com o caso. E não era para menos.

Apontemos um exemplo entre os muitos que ocorreram ao frade italiano Lucas Pacioli.

O título posto na lombada de um livro, de modo geral, divide o comprimento total da lombada de forma perfeita e harmoniosa. Não deve ficar nem muito acima nem muito abaixo. Fica sempre numa certa altura, que pareceu mais agradável, mais harmoniosa, para o operário especializado que preparou a capa. Colocou ali, precisamente ali, porque lhe pareceu mais agradável. Há, portanto, em relação aos espíritos bem formados uma decisiva preferência por esta posição do ponto S no segmento.



Retrado famoso de Isabelle d'Este, por Leonardo da Vinci. Convém notar que a linha dos olhos divide, em média e extrema razão, a distância do alto da testa à extremidade do queixo. O mesmo ocorre com a linha da boca em relação à distância da base do nariz à extremidade do queixo. Na mulher matematicamente bela, verifica-se a predominância do número Φ *(1,618).*

Existe, não há dúvida, uma certa divisão que é mais harmoniosa, mais agradável.

Como achar essa posição do ponto *S* nessa divisão?

Lucas Pacioli, o frade geômetra, ao qual nos referimos, estudou o problema e descobriu uma coisa verdadeiramente espantosa:

- A divisão mais agradável ao espírito, aquela que tem a preferência dos artistas, dos arquitetos, dos pintores, dos escultores e dos gravadores é precisamente a *divisão em média e extrema razão*.

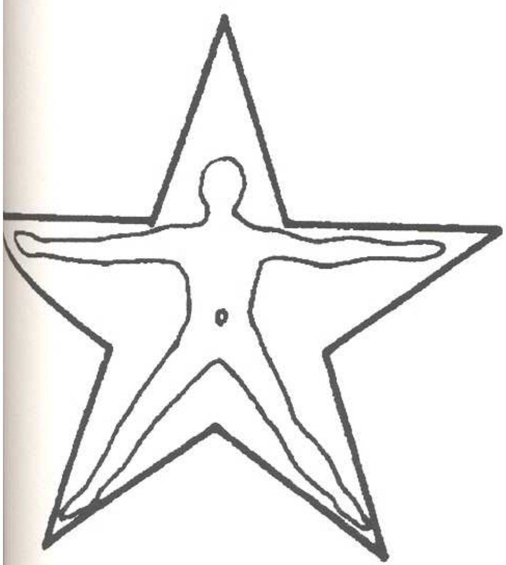
Esse ponto que divide o segmento de uma forma mais agradável, o ponto que determina a divisão em *média e extrema razão*, recebeu, como já dissemos, a denominação de *ponto de ouro*.

E a divisão de um segmento feita pelo *ponto de ouro* foi chamada *de divisão áurea*. Esse nome - *divisão áurea* - foi criado por Leonardo da Vinci (1452-1519), o genial artista florentino - autor de *Gioconda* e da *Ceia*.

Feita a divisão áurea, o segmento maior é chamado de *segmento áureo* e o segmento menor é o *complemento áureo*.

Assinalemos mais alguns exemplos da divisão áurea notadamente no corpo humano:

- A linha da boca, nas pessoas bem conformadas, divide a distância da base do nariz à extremidade do queixo em *média e extrema razão*.



M. Ghycka com essa figura procura estabelecer as relações entre os movimentos de um bailarino e o pentágono, isto é, as relações da dança com o número de ouro.

- A linha dos olhos divide o comprimento do rosto em *média e extrema razão*.

Verifica-se a divisão áurea nas partes em que os dedos são divididos pelas falanges;

- A cicatriz umbilical divide a altura do indivíduo em *média e extrema razão*.

Um arquiteto romano, Marco Vitrúvio Polión, que viveu no século I, a. C., aludiu, em sua obra, a certas relações ligadas à divisão áurea. Mas Vitrúvio só teve a rápica e longínqua percpeção do problema. Coube, portanto, ao franciscano Lucas Pacioli, natural de Burgo, na Toscana, a glória de revelar ao mundo a divisão áurea por ele determinada *sectio divina* (seção feita por Deus !)

A obra de Lucas Pacioli foi publicada em Veneza em 1509.

Nove anos depois do descobrimento do Brasil.

Houve alguns homens verdadeiramente geniais que tiveram a atenção voltada para o *ponto de ouro*.

Leonardo da Vinci, com a poliformia de seu incalculável talento, sentiu-se seduzido pelo mistério da divisão áurea. O célebre astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), que formulou as leis de gravitação universal, era verdadeiro fetichista da divina proporção. "A Geometria - dizia ele - tem dois tesouros. Um é o Teorema de Tales, e o outro é a divisão áurea."

Na divisão áurea a razão entre o *todo* e o segmento *maior* é expressa pelo número irracional algébrico cujo valor é

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad ou \quad 1{,}6180339$$

ou mais aproximadamente

$$1,618$$

Esse número é representado pela letra grega fi (maiúscula):

$$\Phi = 1,618$$

E esse valor é usado na prática.

Apresenta o número Φ propriedades notáveis, mas o estudo dessas propriedades está fora dos limites desse trabalho.

Citemos, apenas, duas dessas propriedades.

Se juntarmos 1 ao número Φ obtemos o quadrado de Φ.

Assim:

$$1 + 1,618 = 1,618 \text{ X } 1,618 = 2,618$$

Quando do número Φ subtraímos uma unidade, obtemos o inverso de Φ. Assim:

$$1,618 - 1 = \frac{1}{1,618} = 0,618$$

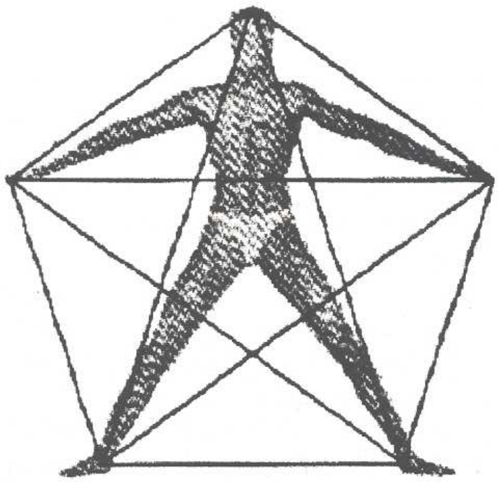
O número Φ é um dos números mais notáveis da Matemática.

Outra observação bastante curiosa.

Para que um retângulo seja harmonioso é necessário que a altura seja o segmento áureo da base.

O retângulo que apresenta essa relação notável entre as suas dimensões é denominado *retângulo áureo* ou *retângulo módulo* Φ.

Encontramos o *retângulo áureo* - conforme observou o matemático J. Timerding - no formato da maior parte dos livros, jornais, revistas, cartões postais, selos, etc. Assinalamos, ainda, o retângulo áureo nas fachadas de muitos edifícios que se distinguem pela elegância de suas linhas arquitetônicas.



Mostra-nos a figura as relações entre os pentágonos regulares (convexo e estrelado) e o corpo humano. Os cinco vértices do pentágono são determinados pelos pontos extremos: cabeça, mãos e pés. O lado do pentágono regular convexo é igual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de $3 - \Phi$.

Outro problema de grande interesse será o seguinte:

- Como se pode construir graficamente, com régua e compasso, o *segmento áureo de um segmento dado AB*?

Vamos supor que é dado um segmento AB ou l.

Chamaremos x ao segmento áureo de AB.

O complemento áureo será l - x.

E temos esse problema:

Segmento *todo*: l

Parte maior: x

Parte menor: $l - x$

As razões segmentárias são:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l - x}$$

No caso da divisão em *média e extrema razão*, essa duas frações devem ser iguais.

Podemos escrever:

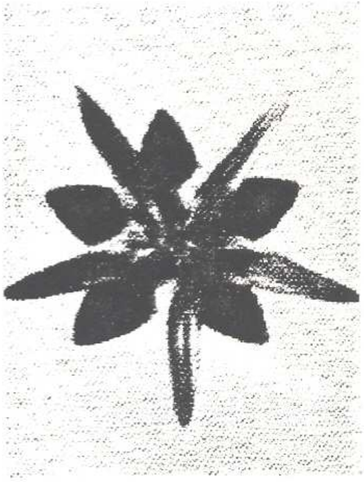
$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l - x} \qquad (A)$$

Obtemos, desse modo, uma equação algébrica com uma incógnita. Essa incógnita será o segmento áureo de *l*.

Vamos calcular o valor de x.

A equação (A) tem a forma de uma proporção geométrica. Sendo o produto dos dois meios igual ao produto dos dois extremos, tiramos da proporção (A) a equação:

$$l\,(l - x) = x^2$$



A simetria pentagonal é encontrada em muitas flores e o pentágono está diretamente relacionado com o número Φ. O número de ouro é, portanto, assinalado em todas as flores pentagonais.

Efetuando o produto indicado no 1° membro, vem:

$$l^2 - lx = x^2$$

Transpondo e ordenando em relação a x, resulta:

$$x^2 + lx - l^2 = 0 \qquad \text{(B)}$$

Trata-se, portanto, de uma equação algébrica, muito simples, do 2° grau.

Sabemos que a equação do 2° grau admite duas raízes.

Como o termo independente $(-l^2)$ é negativo, concluímos que as duas raízes são reais, desiguais, sendo uma positiva e a outra negativa.

Conclusão matemática: o segmento *AB* é dividido em *média e extrema razão* de duas maneiras. A primeira com o ponto de ouro interno (solução positiva) e a segunda com o ponto de ouro externo (solução negativa).

Com o auxílio de uma fórmula clássica podemos tirar da equação (B) o valor de x e achamos:

$$x = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4\,l^2}}{2}$$

Essa fórmula pode ser escrita de uma maneira mais simples:

$$x' = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

E obtemos, assim, as duas raízes da equação (B).

Separando as raízes, x'e x'', temos:

$$x' = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad x'' = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

A 1ª raiz (x'), positiva, nos dá o segmento áureo interno; a 2ª raiz (x''), negativa, nos dá o segmento áureo externo.

Os valores aproximados serão:

$$x' = l \times 0{,}618 \qquad x'' = l \times 1{,}618$$

Façamos um exemplo numérico

Achar o segmento áureo de um segmento que mede 40 cm.

Solução:

O segmento áureo interno será:

40 X 0,618 ou 24,72 cm.

O segmento áureo externo será:

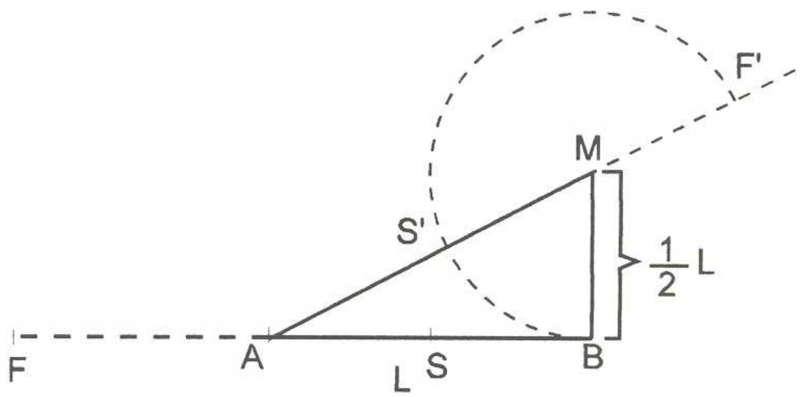
40 X 1,618 ou - 64,72 cm.

Como se pode obter, graficamente, o ponto de ouro de um segmento *AB* ou *l*.

Seja *AB* o segmento dado.

Levanta-se no extremo *B* uma perpendicular ao segmento e igual à metade desse segmento.

Seja *BM* essa perpendicular.



Temos:

$$BM = \frac{1}{2}$$

Unimos o ponto *A* ao ponto *M*, traçamos o segmento *AM* e prolongamos *AM*.

Com um raio igual a *MB*, e com o centro em *M*, traçamos um arco de circunferência que vai cortar *AM* nos pontos *S'* e *F'*. *AS'* será o segmento áureo interno e *AF'* será o segmento áureo externo de *AB*.

Tomando, portanto, na figura, um segmento *AS* igual a *AS'* e *AF* igual a *AF'*, teremos determinado graficamente os dois *pontos de ouro* do segmento *AB*.

Apresenta-se a divisão áurea em várias figuras geométricas.

Assim, o lado do decágono regular convexo é o segmento áureo interno do raio.

Há, como sabemos, dois decágonos regulares: um *convexo* e outro *estrelado*. O lado do decágono regular estrelado é o segmento áureo externo do raio.

A construção do decágono regular (convexo ou estrelado) decorre da divisão do raio em *média e extrema razão*.

O pentágono regular tem, também, a sua construção relacionada com *o ponto de ouro*. O mesmo acontece com o dodecaedro regular.

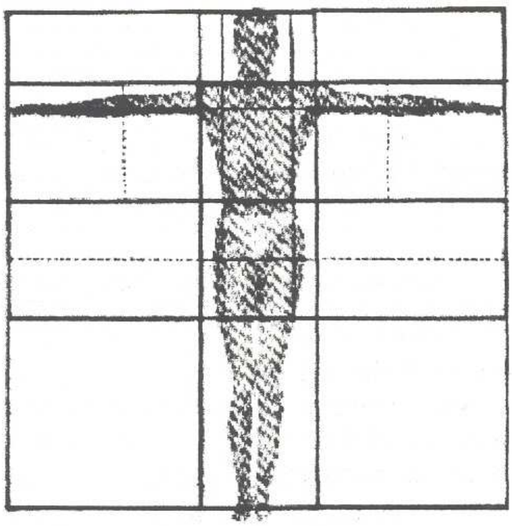
O triângulo é chamado *sublime*, quando, sendo isósceles, tem por base o segmento áureo do lado.

Leonardo de Pisa (1175-1250), um dos vultos mais notáveis e interessantes da História da Matemática, tornou-se conhecido pelo seu apelido de Fibonacci. A sua obra mais citada, *Liber Abacci*, já preconiza o emprego dos algarismos e da notação indo-arábica. Fibonacci, homem de invulgar talento, tinha espírito acentuadamente renovador. Com os limitados recursos de seu tempo, resolveu muitos problemas de Análise Indeterminada e abordou, com extrema perícia, a Aritmética Comercial.

A sucessão numérica bastante curiosa, embora muito simples,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 31, 34, 55...

é apontada com uma das mais famosas em Matemática e denomina-se "sucessão de Fibonacci".



O corpo humano é inscrito num quadrado. Observe que a linha umbilical divide o comprimento total do corpo em média e extrema razão. A linha dos ombros divide em média e extrema razão a distância que vai da linha umbilical ao alto da cabeça.

Forma-se essa sucessão tomando-se os números 0 e 1, que são básicos e constituem os primeiros termos. A partir do terceiro termo a regra de formação é a seguinte: "cada termo é a soma dos dois que o precedem". O terceiro termo será 1 (soma de 0 e 1); o quarto será 2 (soma de 1 com 1); o quinto será 3 (soma de 1 com 2); o sexto será 5 (soma de 2 com 3); e assim por diante. Observe que o décimo termo, 55, por ex. é a soma dos dois que o precedem (o 21 e o 34). Vamos, pois, repetir e fixar a regra: "Cada termo (a partir do terceiro) é sempre igual à soma dos dois que o precede."

A sucessão de Fibonacci, dentro da sua espantosa simplicidade, é uma das coisas mais singulares e estranhas da Matemática.

Suprimidos os dois termos iniciais (0 e 1) escrevemos a sucessão fibonacciana propriamente dita:

$$1,2,3,5,8,13,21,34,55...$$

Tomando-se, nessa sucessão, três termos consecutivos, o termo médio, ao quadrado, excede de uma unidade o produto dos outros dois. Assim, nos termos:

$$3,5,8$$

vemos que o 5 (termo do meio), ao quadrado, é 25. O produto dos outros dois é 24.

Ainda outro exemplo dessa mesma curiosidade. Para os termos consecutivos da sucessão

$$8,13,\ 21$$

o quadrado de 13 (termo do meio), ao quadrado, é 169. O produto dos outros dois é 168.

Vejamos outra singularidade notável da sucessão de Fibonacci.

Formamos as frações ordinárias sucessivas com termos da sucessão. Obtemos as seguintes frações:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}...$$

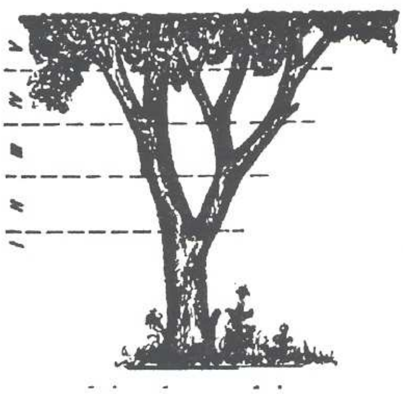
que exprimem valores cada vez mais próximos do inverso do famoso número Φ, que se apresenta no problema da divisão áurea.

Será interessante esclarecer:

A fração $\frac{8}{13}$, por exemplo, exprime um valor aproximado do inverso do número do número Φ. A fração seguinte $\frac{13}{21}$, já corresponde a outra valor mais aproximado do inverso de Φ. E, assim, sucessivamente.

É claro que, teoricamente, a última das frações seria precisamente o inverso do tal número Φ.

Mas há, em relação a essa sucessão fibocciana, algo de muito singular. Ela vai-se revelar, de forma notável, em Botânica. Parece incrível, mas é verdade. Notaram os observadores que o tronco de uma árvore normal, a partir do tronco inicial, desdobra-se em galhos, de acordo com a chamada "lei fibonacciana".

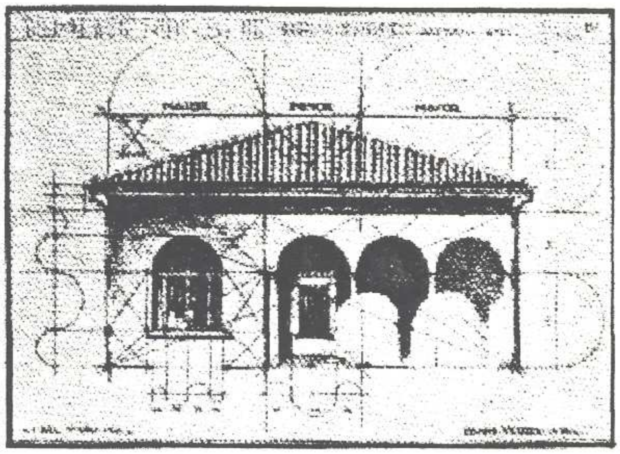


A figura mostra-nos como ocorre a multiplicação fibonacciana dos galhos de uma árvore: . 1, 2, 3, 5, 8 ...

Do solo sai um tronco; do tronco surgem dois; desses dois surgem três; esses três formam cinco; dos cinco partem oito; e assim por diante.

E a árvore, ao crecer, ao multiplicar seus ramos, não se afasta dessa lei.

O número total de galhos de uma árvore é sempre expresso por um dos termos da sucessão de Foibonacci, e está portanto relacionado o número Φ.



A figura mostra-nos como podemos assinalar a divisão áurea numa construção feita dentro das normas rigorosas da Arte. A fachada estará inscrita num retângulo áureo e o ponto de ouro deverá ficar junto à coluna da porta principal.

Interessante esse segredo, cuja razão jamais foi por Deus revelada aos homens.

Outra singularidade notável da divisão áurea é a seguinte:

Como devem as plantas dispor os seus ramos de modo que as folhas recebam o máximo de exposição à luz solar ?

Os ramos são ordenados de modo que nunca se superponham, isto é, um ramos não pode impedir que suas folhas façam sombra nas folhas que estão abaixo.

Os ramos brotam do tronco seguindo um certo ângulo chamado ângulo ideal, que é calculado com o auxílio do número Φ.

Esse ângulo ideal é 360º dividido pelo quadrado de Φ.

O quociente será: 137º30'28" (valor aproximado).

Esse ângulo é designado pela letra grega alfa: α.

Façamos, ao terminar, algumas observações sobre o *número de ouro*.

O *número de ouro* aparece:

1 - em uma infinidade de animais;
2 - No corpo humano;
3 - Nas flores;
4 - Na formação das árvores (fibonacci);
5 - Na disposição das folhas em certas plantas;
6 - Nos frutos;
7 - Na espiral logarítmica;
8 - Na construção do decágono regular;
9 - Na construção do pentágono regular;
10 - Em vários poliedros regulares;
11 - Na pirâmide de Queops (triângulo ideal);
12 - Em muitas obras de arte;
13 - Nas danças clássicas;
14 - Nas grandes catedrais da Idade Média;
15 - Na Arquitetura;
16 - Na Pintura e na Escultura;
17 - Na Poesia.

Qual a razão dessa preferência dos artistas pelo *ponto de ouro* ?

Qual o porquê da beleza na divisão em *média e extrema razão* ?

Até hoje (1971) filósofos e matemáticos não conseguiram explicar o extraordinário mistério do *sectio divina*.

Evaristo Galois (1811-1832), francês, um dos maiores gênios da Matemática, observou que o grande valor da inteligência humana não está em achar a Verdade, mas sim em esforçar-se por descobrí-la.

Quando chegaremos à Verdade em relação ao *ponto de ouro*?

Escreveu o Padre Leonel Franca, S.J.:

A Verdade não é monopólio de ninguém; é patrimônio comum das inteligências.

Tenhamos sempre esta sentença admirável de S. Agostinho:

Faz-se mister ao homem não desprezar o valor dos números.

Os ramos brotam do tronco seguindo um certo ângulo chamado ângulo ideal, que é calculado com o auxílio do número Φ.

Esse ângulo ideal é 360º dividido pelo quadrado de Φ.

O quociente será: 137º30'28" (valor aproximado).

Esse ângulo é designado pela letra grega alfa: α.

Façamos, ao terminar, algumas observações sobre o *número de ouro*.

O *número de ouro* aparece:

1 - em uma infinidade de animais;
2 - No corpo humano;
3 - Nas flores;
4 - Na formação das árvores (fibonacci);
5 - Na disposição das folhas em certas plantas;
6 - Nos frutos;
7 - Na espiral logarítmica;
8 - Na construção do decágono regular;
9 - Na construção do pentágono regular;
10 - Em vários poliedros regulares;
11 - Na pirâmide de Queops (triângulo ideal);
12 - Em muitas obras de arte;
13 - Nas danças clássicas;
14 - Nas grandes catedrais da Idade Média;
15 - Na Arquitetura;
16 - Na Pintura e na Escultura;
17 - Na Poesia.

Qual a razão dessa preferência dos artistas pelo *ponto de ouro* ?

Qual o porquê da beleza na divisão em *média e extrema razão* ?

Até hoje (1971) filósofos e matemáticos não conseguiram explicar o extraordinário mistério do *sectio divina*.

Evaristo Galois (1811-1832), francês, um dos maiores gênios da Matemática, observou que o grande valor da inteligência humana não está em achar a Verdade, mas sim em esforçar-se por descobrí-la.

Quando chegaremos à Verdade em relação ao *ponto de ouro*?

Escreveu o Padre Leonel Franca, S.J.:

A Verdade não é monopólio de ninguém; é patrimônio comum das inteligências.

Tenhamos sempre esta sentença admirável de S. Agostinho:

Faz-se mister ao homem não desprezar o valor dos números.

ANEXO 2

QUATRO CORES BASTAM

Alguns pensam que o computador é idiota. É preciso contar-lhe completamente a anedota e explicar-lhe bem para que se ria. Uma vírgula no lugar de um ponto e vírgula, e já se enganou. Verdade é que a esferográfica é ainda mais imbecil, mas sem a sua ajuda poucos problemas seríamos capazes de resolver.

A história que te vou contar é a de um problema que só muito recentemente se conseguiu resolver, e com a ajuda indispensável de um computador. E não se trata apenas de fazer cálculos rapidamente. Provavelmente são muitos os resultados matemáticos profundamente adormecidos nos circuitos dos nossos computadores esperando o programa que consiga acordá-los.

Um pouco de história

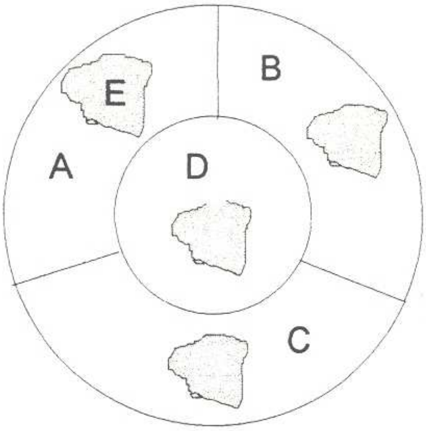
Em 1852, Francis Guthrie, que saíra havia pouco da Universidade de Londres, escreveu ao seu irmão, que ainda lá era estudante, perguntado-lhe se existira alguma demonstração do fato, que os impressores de mapas constantemente usavam, de quatro cores serem suficiente para colorir adequadamente qualquer mapa. Frederick, o irmão, não encontrou nenhuma razão, mas perguntou a um dos professores, bom matemático e aficcionado, por outro lado, dos quebra-cabeças e jogos matemáticos do tempo, Arthur Cayley. Em 1878, Cayley propôs o problema como interessante à London Mathematical Society. Apenas um ano depois, um advogado de Londres, Arthur B. Kempe, publicou um artigo no qual se propunha uma demonstração de que quatro cores eram suficientes. A solução de Kempe foi dada como certa durante onze anos. Em 1890, P.J. Heawood encontrou uma falha no engenhoso e complicado argumento de Kempe. Heawood entusiasmou-se tanto com o problema, que dedicou toda a sua vida a estudá-lo. Durante mais de sessenta anos trabalhou nele a partir de ângulos muito diferentes, obtendo resultados interessantes que fizeram avançar consideravelmente a topologia, mas não conseguiu resolver o problema original. Entre outras coisas, averiguou que para um mapa qualquer na superfície de um pneu sete cores bastam, que para um mapa numa vanda de Möbius bastam seis... Problemas aparentemente mais complicados foram rapidamente resolvidos, mas o de Franci Guthrie no globo teve de esperar mais de cem anos ajuda decisiva do computador!

Em 1950, sabia-se que qualquer mapa de menos de 36 países se pode colorir com quatro cores. Nos anos 50, Henrich Heesch, professor em Hanôver, começou a pensar que as idéias de Kempe, juntamente com a ajuda do computador, poderiam talvez conduzir a uma solução, mas, embora pressentisse como se poderia fazer a coisa, ainda estava longe da realização do seu plano de trabalho. Desde 1950 a 1970, Heesch foi desenvolvendo as técnicas que conduziram à solução. O aperfeiçoamento e a realização deste plano de trabalho foram levados a cabo, de 1970 a 1976, por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da Universidade do Ilinóis. Depoisd e muitas horas de reflexão e de trabalho e diálogo com o computador, puderam por fim anunciar, em Junho de 1976, que, efetivamente, *quatro cores bastam.*

Tentarei dar-te uma idéia dos pontos que marcaram o caminho até a estranha forma de solução que temos agora.

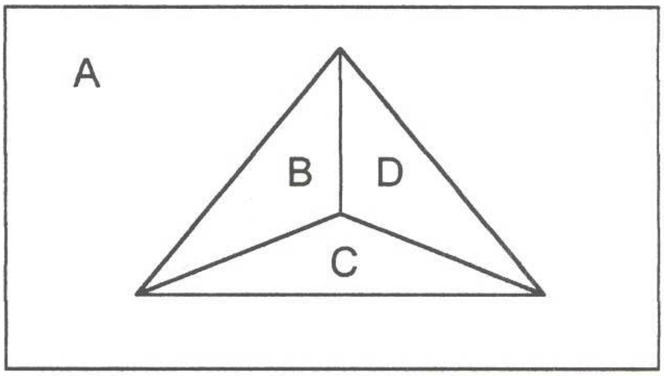
O problema

Trata-se de determinar o número mínimo de cores que bastam para colorir bem qualquer mapa no globo ou no plano. (este número vai ser o mesmo nos dois casos, globo e plano.) Países com uma *linha* de fronteira comum devem receber cores distintas. Exclui-se que um país esteja partido em pedaços separados colocados dentro de outros (enclaves). É fácil ver que, de outro modo, fixado um número, 6 por exemplo, se pode construir um mapa que necessite de seis cores. Isto é, excluem-se situações como a seguinte:



Neste mapa, em que *E* é o país a tracejado, com enclaves em todos os outros, são necessárias cinco cores.

Também é claro que três cores não bastam para colorir qualquer mapa. Este, por exemplo,

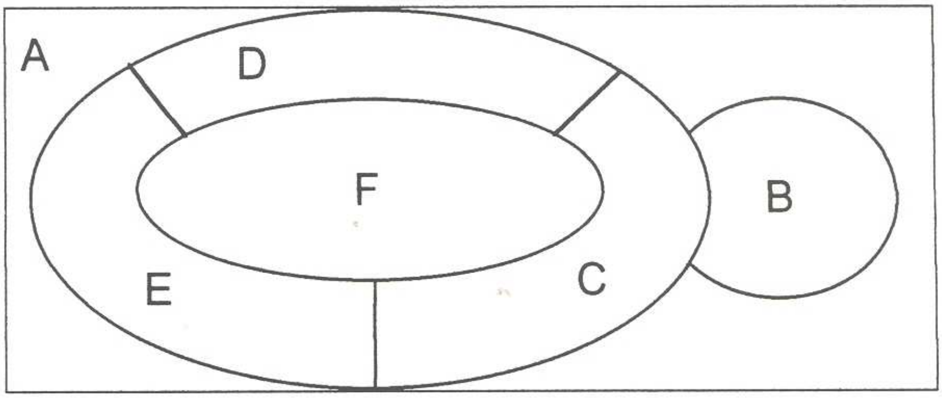


necessita de quatro.

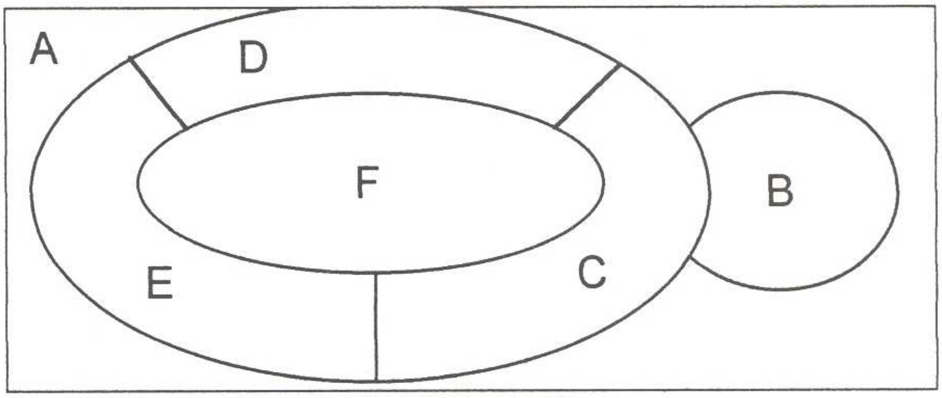
Heawood demonstrou rapidamente que cinco cores bastam. *Bastarão quatro?*

Para alguns dos raciocínios que vamos utilizar é conveniente pôr o problema de outra forma mais cômoda equivalente à que temos. para um mapa qualquer podemos constituir um grafo associado da seguinte maneira. (*Grafo,* lembra-te, é simplesmente um conjunto de pontos, *vértices*, unidos alguns deles por umas quantas linhas, *arcos.* Fazemo-lo da seguinte forma. No interior de cada país assinalamos uma capital. As capitais vão ser os vértices do grafo dual. Se dois países têm uma linha de fronteira comum, unimos as suas capitais por uma estrada que cruze a linha de fronteira comum sem que estas estradas se cruzem. Tais estradas serão os arcos do grafo dual.

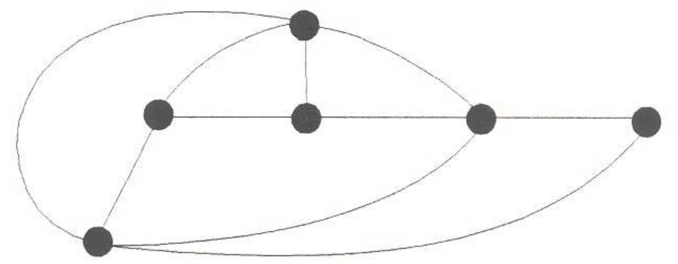
Por exemplo, se o mapa é este:



assinalamos as capitais e unimo-las segundo a regra referida:



Resulta assim o grafo dual



Países ←→ Capitais ←→ Vértices do grafo
Linhas de fronteira vão corresponder a arcos do grafo

O grau de um vértice (capital) do grafo dual, quer dizer, o número de arcos nele concorrentes, é o número de países vizinhos do país correspondente a essa capital (vértice).

O problema, em termos de grafo dual, consiste em determinar o número mínimo de cores para colorir um grafo como o que resulta de um mapa da forma referida, de modo que dois vértices adjacentes tenham cores distintas.

A demonstração que Kempe fez em 1879 de que quatro cores bastam é certamente engenhosa e, embora falsa num ponto, foi o seu esquema que foi utilizado na demonstração que temos hoje. Por isso, vale a pena conhecê-la. Com ela será fácil entender o caminho atual até ao teorema.

A "demonstração" de Kempe

Chamaremos mapa *Penta* (pentacromático, se não queres abreviar) a um mapa que exija cinco cores para ser bem colorido. Não se pode colorir com menos.

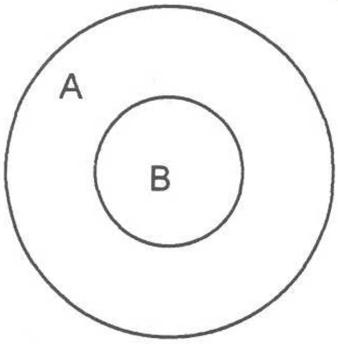
O nosso objetivo é mostrar que não existe mapa penta.

Chamaremos mapa normal àquele que contempla as duas condições seguintes:

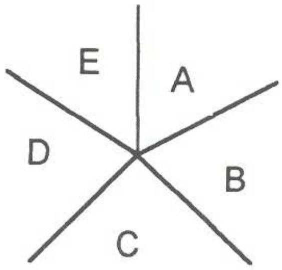
a) Não contém um país isolado dentro do outro, isto é, um país com um só vizinho;

b) Nenhum ponto de fronteira é fronteira de mais de três países vizinhos.

Excluem-se, portanto, situações como as seguintes:



(a)



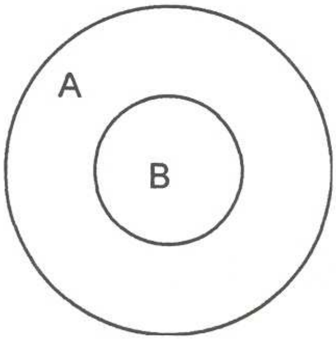
(b)

observa que o grafo associado a um mapa normal (os pontos de fronteira são fronteira de dois ou três países ao mesmo tempo) é uma triangulação curvilínea do globo, ou seja, uma partição do globo em triângulos curvilíneos.

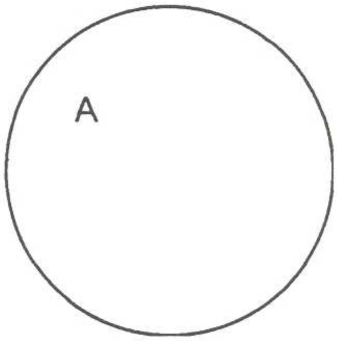
Agora podemos entender a "demonstração" de Kempe de que *não existe mapa penta* nos quatro passos seguintes:

1) *Se existe mapa penta* M, *existe mapa penta normal.*

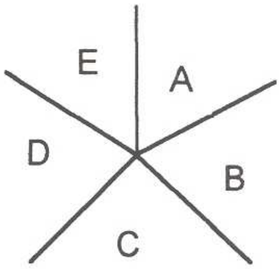
Com efeito, se *M* tem configurações parciais assim:



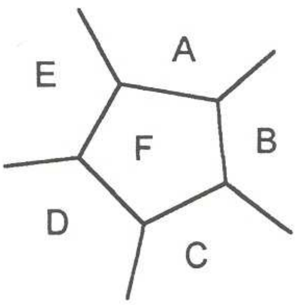
subsituem-se por outras assim:



e se tem alguma configuração parcial deste tipo (algum ponto de fronteira de mais de três países):



substitui-se por outra assim (mediante a adição de um país, resulta que nenhum ponto da fronteira é fronteira de mais de três países vizinhos):



Chamaremos *M** ao novo mapa, claramente normal. Se o novo mapa *M** não fosse penta, podê-lo-íamos colorir com quatro cores. Vamos colori-lo. Mas então, juntando os países que reitamos a *M* para obter *M** e suprimindo os que juntamos, facilmente resulta que *M* também se pode colorir com quatro cores, ao contrário do que supusemos.

Por outro lado, o mapa é normal e, assim, em cada vértice concorrem exatamente três arcos de fronteira. Por isso, *3V* é também o número de arestas contadas duas vezes, isto é, *3V = 2A*. Eliminando *F, A, V* em

$F + F2 + F3 + F4 + \ldots$

$2A = 2F2 + 3F3 + 4F4 + \ldots$

$2A = 3V$

$F + V = A + 2$

resulta facilmente

$12 = (6 - 2)F2 + (6 - 3)F3 + (6 - 4)F4 + (6-5)\,F5 + (6-6)F6 + (6-7)f7 + \ldots$

Portanto, como a soma é 12, algum dos números *F2, F3, F4, F5* é maior do que zero, o que expressa precisamente o que queremos demonstrar. Engenhoso, não é? Esta relação de Kempe desempenhou um grande papel na demonstração que se conseguiu em 1976.

4) *Nenhum mapa penta normal e mínimo pode conter um país com menos de seis vizinhos.*

Se conseguíssemos demonstrar isto, já teríamos demonstrado que não pode existir um mapa penta, visto que isto contradiz 3, que já tínhamos estabelecido. Neste ponto, Kempe enganou-se, mas apenas no final. Uma boa parte do seu raciocínio é também válida e serviu para a demonstração correta.

Para demonstrar 4, comecemos considerando um mapa *M* penta normal e mínimo. Se contivesse esta configuração parcial

2) *Se existe mapa penta normal, existe mapa penta norma e mínimo*, isto é, com o menor número possível de países. Consideraremos todos os mapas penta normais. Consideremos todos os mapas penta normais. Cada um tem um número finito de países. Haverá algum com o menor número. Claríssimo, não é?

3) *Qualquer mapa normal contém pelo menos um país e com menos de seis países vizinhos.*

Isto torna-se mais sério e começa a ser mais profundo. Também este passo de Kempe vai ser totalmente válido.

Para entender melhor este passo, consideremos o mapa normal, que sabemos que é uma partição da esfera em polígonos curvilíneos. Podemos aplicar-lhe o teorema de Euler que já conheces:

Faces + Vértices = Arestas + 2

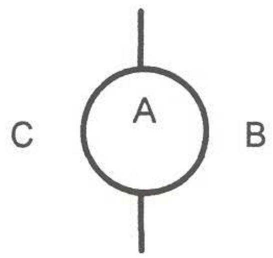
O número F de faces podemo-lo exprimir assim. Se $F2$ é o número de países com dois vizinhos, $F3$ é o número de países com três vizinhos..., então, claramente, $F = F2 + F3 + F4 + \ldots$

Por outro lado, cada arco ou aresta é fronteira de dois países vizinhos, e, assim,

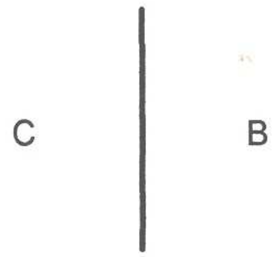
$2F2 + 3F3 + 4F4 + \ldots$

É o número de arcos contados duas vezes, quer dizer,

$2A = 2F2 + 3F3 + 4F4 + \ldots$

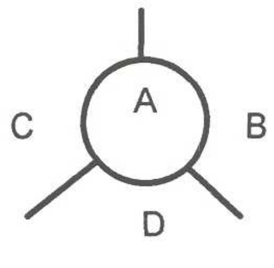


país A com dois vizinhos, o mapa M^* que resulta ao substituir em M a dita configuração parcial por esta (supressão de A)



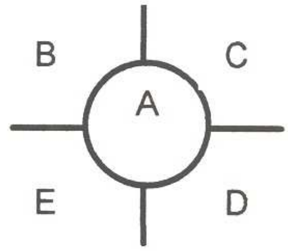
é normal e não é penta, pois tem um país a menos que M, e M era penta normal e *mínimo*. Assim, M^* pode colorir-se com quatro cores. Vamos colori-lo. Mas agora é claro que M também pode colorir-se com quatro cores, restituindo A e dando-lhe uma cor distinta da de B e C. Esta contradição demonstra que M não pode ter a configuração suposta, se é que existe.

A configuração seguinte (A com três vizinhos).

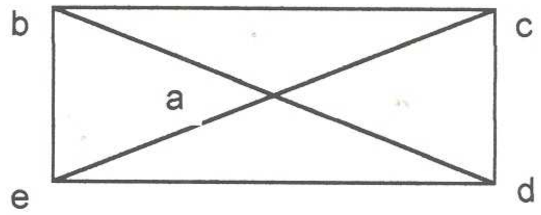


exclui-se da mesma forma, suprimindo A, colorindo o mapa M^* que resulta e logo colorindo o mapa M.

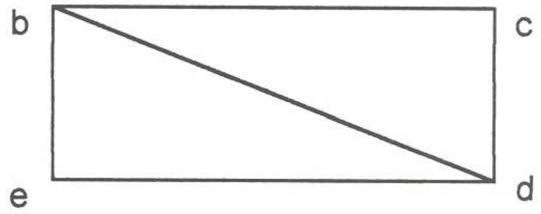
A exclusão da configuração



é mais complicada. Passamos ao grafo dual para raciocinar mais comodamente. O grafo dual é uma triangulação da esfera que contém a configuração parcial.

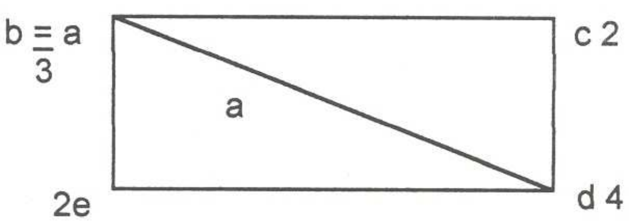


Eliminamos o país *a* identificando *a* com *b*, e fica assim a configuração *reduzida*:



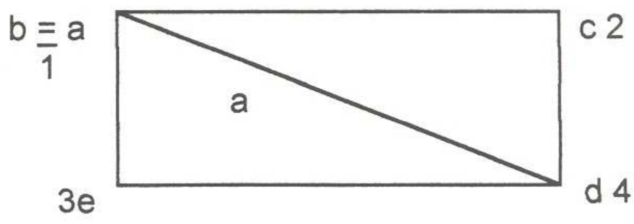
O grafo resultante não é penta. Pode-se colorir com quatro cores, 1,2,3,4. Distinguimos dois casos:

Caso 1. Se *c* e *e* têm a mesma cor, 2 por exemplo, *b* terá outra, a 3 por exemplo, e *d* outra distinta, a 4 por exemplo. Assim:



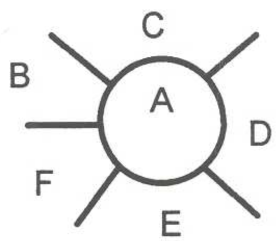
Então restituímos *a*, damos-lhe a cor 1 e resulta o gráfico inicial colorido com quatro cores, contra a suposição de que era penta.

Caso 2. Se *c* e *e* têm cores distintas, 2 e 3 por exemplo, *b* e *d* têm a 1 e a 4, como se indica:



Então, ou se pode ir de *c* a *e* por arcos fora do retângulo *bcde* passando por uma cadeia de vértices 232323....23 (cadeia de Kempe), ou não se pode. Se se pode, é porque não se pode ir por fora do retângulo desde *b* a *d* por uma cadeia 141414...14. Tomamos o par *bd* ou *ce* para o que não se pode. Seja *ce*, por exemplo. Partindo de *c,* h;a uma via 2323... que não se pode continuar por tropeçar com a cadeia 141414... 14 de *b* a *d*. Essa via muda para 3232... e assim colocamo-nos no caso 1 e podemos proceder como ali.

A falha de Kempe esteve na *redução* que quis fazer da configuração

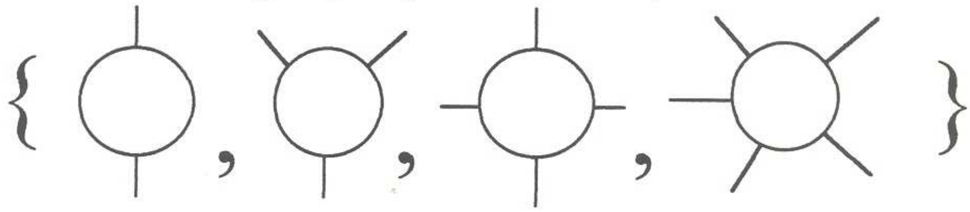


de um modo semelhante, mas mais complicado. A sua demonstração está errada aqui. Mas, com o que vimos, já está bem clara a idéia. Apresento-ta de novo em termos modernos, desta vez em três passos.

A demonstração de Appel e Haken

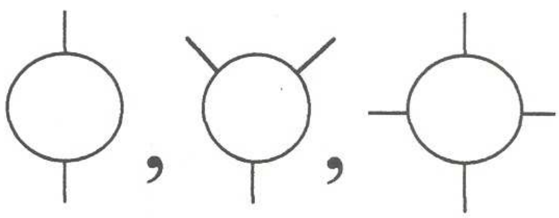
À vista do esquema da demonstração de Kempe entenderás o esquema seguinte:

1) *Todo o mapa penta normal tem certos conjuntos inevitáveis de configurações.* O conjunto inveitável de configurações parciais de Kempe foi este:

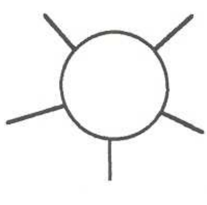


Conjunto inveitável de configurações que quer dizer *alguma das configurações deste conjunto* tem de estar no mapa.

2) *Há certas configurações que não podem entrar num mapa penta mínimo (configurações redutíveis).* Kempe demonstrou que as configurações parciais



são redutíveis. A demonstração que deu para



Está errada.

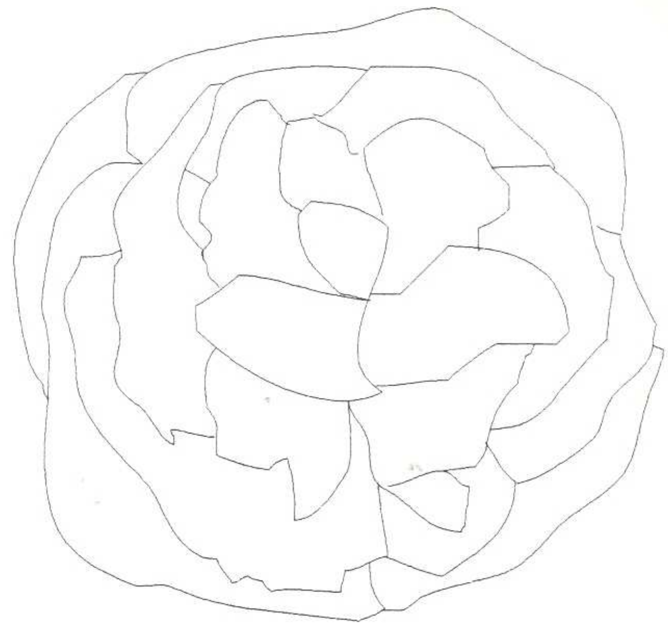
3) *A construção de um conjunto inevitável de configurações redutíveis implica a não existência de um mapa penta.*

Em junho de 1976, Appel e Haken conseguiram construir um conjunto de 1482 configurações redutíveis.

Nos últimos trinta anos, os aficionados do problema, especialmente Heesch, conseguiram criar métodos programáveis no computador para construir conjuntos inevitáveis de configurações. Também se fizeram programas para comprovar se uma configuração é ou não redutível. Estes programas eram complicados e longos. Tanto que até os computadores modernos necessitariam de séculos para comprovar se as configurações de certos conjuntos inevitáveis que haveria que considerar eram ou não redutíveis. Appel e Haken conseguiram reduzir a tarefa a umas dimensões mais manejáveis. Com isso conseguiram finalmente, em 1976, obter o resultado. O problema estava resolvido.

O método consistiu num diálogo inteligente com o computador. É interessante ouvi-los descrever como, em certo momento do seu trabalho, o computador começou a ensinar aos seus mestres o modo adequado de proceder.

Neste ponto, o programa, que até então havia absorvido as nossas idéias e progressos de dois anos, começou a supreender-nos. A princípio, confirmamos os seus raciocínios à mão, de modo que podíamos sempre prever o curso que seguiria em qualquer situação dada, mas agora começou de repente a atuar como uma máquina. Fabricaram-se estratégias compostas basadas nos truques que lhe tínhamos 'ensinado' e, aos poucos, estes ensaios eram muito mais inteligentes que aqueles que havíamos tentado. Assim, começou a ensinar-nos coisas acerca do modo de proceder que nunca tínhamos esperado. Em certo sentido, tinha ultrapassado os seus criadores em alguns aspectos da tarefa 'intelectual', assim como o havia feito com as partes mecânicas da tarefa".



Poderias colorir este mapa com quatro cores?

Depois de ouvir isto podes voltar a perguntar: "O computador é idiota ou esperto? "Um computador bem ensinado ganha-te ao xadrez, ganha-te ao *nim*, ganha-te aos três em linha ou pelo menos empata. E aqui tens um caso de um teorema, o das quatro cores, que não se saberia ainda que era teorema se não fosse indispensável ajuda do computador. Com certeza que rapidamente veremos outros teoremas com o mesmo sabor. Rapidamente veremos também como o computador é capaz de ensinar integrais, de corrigir ou teus exercícios, de te dar notas (que horror!). É de esperar que aprendamos a usá-lo bem, porque, mal usado, tonar-vos-á a vida impossível.

NOTAS

A dificuldade de colorir adequadamente um mapa concreto revela-se rapidamente, de modo claro, no seguinte jogo idealizado por Stephen Barr. Dois jogadores, *A* e *B*, sentam-se com quatro lápis de diferentes cores e um papel. O jogador *A* desenha uma região. O jogador *B* põe-lhe uma cor e desenha outra região... Ganha quem, à base de astúcia ao desenhar as regiões sucessivas, faça que o outro não possa colorir adequadamente a região proposta.

ANEXO 3


PASSOS DE UM PROJETO
1
Como o projeto foi proposto.
2
Como o projeto foi especificado pelo analista.
3
Como o projeto foi desenvolvido pelo analista.
4
Como o projeto foi programado.
5
Como o usuário utiliza o projeto.
6
O que o usuário realmente queria.
SELLAN
Fernando O. Oliveira Jr.
Santa Maria - RS

ANEXO 4

Questionário :

Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Curso:...
....

Período...
....

1) Em que escola de 1º grau você estudou ?

 municipal

estadual

federal

particular

 municipal e estadual

 municipal e federal

 municipal e particular

estadual e federal

estadual e particular

federal e particular

outros citar...

2) Em que escola de 2º grau você estudou :

 municipal

estadual

□federal

□particular

□ municipal e estadual

□ municipal e federal

□ municipal e particular

□estadual e federal

□estadual e particular

□federal e particular

□outros citar..

3) Qual o seu curso de 2° grau ?

....
....

4) Você aprendeu a operar a calculadora científica, no 2º grau :

□sim □não

5) Você se julga capaz de resolver os exercícios abaixo, com o auxilio da calculadora ?

□sim □não

6) Resolva $\dfrac{\frac{7}{9}+\frac{9}{8}+\frac{4}{5}}{\frac{2}{7}+\frac{3}{28}}$ é : Resp. $\dfrac{6811}{990}$

7) Doze operários levam 25 dias para executar um determinada obra. Quantos dias levarão 10 operários para executar a mesma obra ?

Resp. 30 dias

8) Resolva :

$15^3 : 3^3 =$

9) $\dfrac{(-5)^2 - 3^2 + (\frac{2}{3})^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}}$ = é igual a : Resp. $\dfrac{1530}{73}$

10) Os cálculos abaixo "demonstram" que 2=1. Descubra em que a linha esta o erro.

linha 1. 2 =2

linha 2. 6 - 4 = 3 - 1

linha 3. 4 - 6 = 1 - 3

linha 4. $4 - 6 + \frac{9}{4} = 1 - 3 + \frac{9}{4}$

linha 5. $4 - 2.2.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} = 1 - 2.1.\ \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$

linha 6. $(2 - \frac{3}{2})^2 = (1 - \frac{3}{2})^2$

linha 7. $\sqrt{(2 - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{(1 - \frac{3}{2})^2}$

linha 8. $2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}$

linha 9. $2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 1$

linha 10. 2=1

11) Resolva o sistema de equações $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$

12) Fatore

$x^2 - x - 30 = 0$

13) Você já estudou computação ?

....
....

14) Caso tenha respondido afirmativamente a questão 13 elabore um algoritmo para colocar 3 número em ordem crescente.

Obs.: Faça um breve comentário sobre o procedimento adotado na elaboração das questões.

ANEXO 5

Com Calculadora

	Questão 1 Particular	Público	Misto	Questão 2 Particular	Público	Misto	Questão 3 Profissionalizante	Ed.Geral	Não Resp
Adm 1 not	8	7	4	7	7	5	10	9	0
Adm a m	14	7	5	21	4	1	6	19	1
Cont 2 Not	2	16	1	6	11	2	11	8	0
Inf 1	5	11	5	7	12	2	9	11	1
Adm b m	14	10	5	18	10	1	7	21	1
TOTAL	43	51	20	59	44	11	43	68	3

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

Adm 1 not	7,02%	6,14%	3,51%	6,14%	6,14%	4,39%	8,77%	7,89%	0,00%
Adm a m	12,28%	6,14%	4,39%	18,42%	3,51%	0,88%	5,26%	16,67%	0,88%
Cont 2 Not	1,75%	14,04%	0,88%	5,26%	9,65%	1,75%	9,65%	7,02%	0,00%
Inf 1	4,39%	9,65%	4,39%	6,14%	10,53%	1,75%	7,89%	9,65%	0,88%
Adm b m	12,28%	8,77%	4,39%	15,79%	8,77%	0,88%	6,14%	18,42%	0,88%
TOTAL	37,72%	44,74%	17,54%	51,75%	38,60%	9,65%	37,72%	59,65%	2,63%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos,com calculadora, consultados

cont 1 not	18,60%	13,73%	20,00%	11,86%	15,91%	45,45%	23,26%	13,24%	0,00%
Adm 1 m	32,56%	13,73%	25,00%	35,59%	9,09%	9,09%	13,95%	27,94%	33,33%
Cont 2 Not	4,65%	31,37%	5,00%	10,17%	25,00%	18,18%	25,58%	11,76%	0,00%
Inf 1	11,63%	21,57%	25,00%	11,86%	27,27%	18,18%	20,93%	16,18%	33,33%
Adm b m	32,56%	19,61%	25,00%	30,51%	22,73%	9,09%	16,28%	30,88%	33,33%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Com Calculadora

	Quest4 Sim	Não	Não Resp	Questão 5 Favorável	Desfavorável	Não Resp	Questão 6 Certo	Errado	Vazio
Adm 1 not	5	14	0	13	2	4	6	11	2
Adm a m	3	23	0	15	11	0	17	9	0
Cont 2 Not	2	17	0	11	5	3	12	6	1
Inf 1	3	18	0	13	5	3	9	8	4
Adm b m	0	29	0	20	7	2	0	29	0
TOTAL	13	101	0	72	30	12	44	63	7

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

Adm 1 not	4,39%	12,28%	0,00%	11,40%	1,75%	3,51%	5,26%	9,65%	1,75%
Adm a m	2,63%	20,18%	0,00%	13,16%	9,65%	0,00%	14,91%	7,89%	0,00%
Cont 2 Not	1,75%	14,91%	0,00%	9,65%	4,39%	2,63%	10,53%	5,26%	0,88%
Inf 1	2,63%	15,79%	0,00%	11,40%	4,39%	2,63%	7,89%	7,02%	3,51%
Adm b m	0,00%	25,44%	0,00%	17,54%	6,14%	1,75%	0,00%	25,44%	0,00%
TOTAL	11,40%	88,60%	0,00%	63,16%	26,32%	10,53%	38,60%	55,26%	6,14%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos,com calculadora, consultados

cont 1 not	38,46%	13,86%	0,00%	18,06%	6,67%	33,33%	13,64%	17,46%	28,57%
Adm 1 m	23,08%	22,77%	0,00%	20,83%	36,67%	0,00%	38,64%	14,29%	0,00%
Cont 2 Not	15,38%	16,83%	0,00%	15,28%	16,67%	25,00%	27,27%	9,52%	14,29%
Inf 1	23,08%	17,82%	0,00%	18,06%	16,67%	25,00%	20,45%	12,70%	57,14%
Adm b m	0,00%	28,71%	0,00%	27,78%	23,33%	16,67%	0,00%	46,03%	0,00%
TOTAL	100,00%	100,00%	0,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Com Calculadora

	Questão7			Questão 8			Questão 9		
	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio
Adm 1 not	7	8	4	13	5	1	15	2	2
Adm a m	2	17	7	23	3	0	6	19	1
Cont 2 No	17	1	1	15	4	0	5	14	0
Inf 1	6	9	6	18	0	3	4	11	6
Adm b m	7	21	1	27	2	0	8	21	0
TOTAL	39	56	19	96	14	4	38	67	9

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

Adm 1 not	6,14%	7,02%	3,51%	11,40%	4,39%	0,88%	13,16%	1,75%	1,75%
Adm a m	1,75%	14,91%	6,14%	20,18%	2,63%	0,00%	5,26%	16,67%	0,88%
Cont 2 No	14,91%	0,88%	0,88%	13,16%	3,51%	0,00%	4,39%	12,28%	0,00%
Inf 1	5,26%	7,89%	5,26%	15,79%	0,00%	2,63%	3,51%	9,65%	5,26%
Adm b m	6,14%	18,42%	0,88%	23,68%	1,75%	0,00%	7,02%	18,42%	0,00%
TOTAL	34,21%	49,12%	16,67%	84,21%	12,28%	3,51%	33,33%	58,77%	7,89%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos,com calculadora, consultados

Adm 1 not	17,95%	14,29%	21,05%	13,54%	35,71%	25,00%	39,47%	2,99%	22,22%
Adm a m	5,13%	30,36%	36,84%	23,96%	21,43%	0,00%	15,79%	28,36%	11,11%
Cont 2 No	43,59%	1,79%	5,26%	15,63%	28,57%	0,00%	13,16%	20,90%	0,00%
Inf 1	15,38%	16,07%	31,58%	18,75%	0,00%	75,00%	10,53%	16,42%	66,67%
Adm b m	17,95%	37,50%	5,26%	28,13%	14,29%	0,00%	21,05%	31,34%	0,00%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Com Calculadora

	Questão 10			Questão 11			Questão 12			Questão 13			tempo
	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio	Sim	Não	Vazio	médio
Adm 1 not	5	13	1	15	3	1	0	10	9	5	13	1	27,37
Adm a m	9	12	5	19	6	1	1	17	8	6	19	1	28,08
Cont 2 Not	2	13	4	5	6	8	1	4	14	2	16	1	40,37
Inf 1	5	13	3	13	5	3	4	7	10	8	11	2	38,19
Adm b m	3	26	0	21	8	0	10	19	0	8	17	4	48,03
TOTAL	24	77	13	73	28	13	16	57	41	29	76	9	***36,408***

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

Adm 1 not	4,39%	11,40%	0,88%	13,16%	2,63%	0,88%	0,00%	8,77%	7,89%	4,39%	11,40%	0,88%	24,01%
Adm a m	7,89%	10,53%	4,39%	16,67%	5,26%	0,88%	0,88%	14,91%	7,02%	5,26%	16,67%	0,88%	24,63%
Cont 2 Not	1,75%	11,40%	3,51%	4,39%	5,26%	7,02%	0,88%	3,51%	12,28%	1,75%	14,04%	0,88%	35,41%
Inf 1	4,39%	11,40%	2,63%	11,40%	4,39%	2,63%	3,51%	6,14%	8,77%	7,02%	9,65%	1,75%	33,50%
Adm b m	2,63%	22,81%	0,00%	18,42%	7,02%	0,00%	8,77%	16,67%	0,00%	7,02%	14,91%	3,51%	42,13%
TOTAL	21,05%	67,54%	11,40%	64,04%	24,56%	11,40%	14,04%	50,00%	35,96%	25,44%	66,67%	7,89%	31,94%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos,com calculadora, consultados

Adm 1 not	20,83%	16,88%	7,69%	20,55%	10,71%	7,69%	0,00%	17,54%	21,95%	17,24%	17,11%	11,11%	75,18%
Adm a m	37,50%	15,58%	38,46%	26,03%	21,43%	7,69%	6,25%	29,82%	19,51%	20,69%	25,00%	11,11%	77,13%
Cont 2 Not	8,33%	16,88%	30,77%	6,85%	21,43%	61,54%	6,25%	7,02%	34,15%	6,90%	21,05%	11,11%	110,88%
Inf 1	20,83%	16,88%	23,08%	17,81%	17,86%	23,08%	25,00%	12,28%	24,39%	27,59%	14,47%	22,22%	104,89%
Adm b m	12,50%	33,77%	0,00%	28,77%	28,57%	0,00%	62,50%	33,33%	0,00%	27,59%	22,37%	44,44%	131,92%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

S/calculadora

	Questão 1 Particular	Público	Misto	Questão 2 Particular	Público	Misto	Questão 3 ofissionalizar	Ed.Geral	Não Resp
cont 1 not	14	11	9	15	9	10	11	23	0
Adm 1 m	17	6	4	18	7	2	7	19	1
Cont 2 Not	3	13	4	10	8	2	9	11	0
Inf 1	13	21	5	15	22	2	12	27	0
Adm b m	15	3	5	17	3	3	2	20	1
TOTAL	62	54	27	75	49	19	41	100	2

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

cont 1 not	9,79%	7,69%	6,29%	10,49%	6,29%	6,99%	7,69%	16,08%	0,00%
Adm 1 m	11,89%	4,20%	2,80%	12,59%	4,90%	1,40%	4,90%	13,29%	0,70%
Cont 2 Not	2,10%	9,09%	2,80%	6,99%	5,59%	1,40%	6,29%	7,69%	0,00%
Inf 1	9,09%	14,69%	3,50%	10,49%	15,38%	1,40%	8,39%	18,88%	0,00%
Adm b m	10,49%	2,10%	3,50%	11,89%	2,10%	2,10%	1,40%	13,99%	0,70%
TOTAL	43,36%	37,76%	18,88%	52,45%	34,27%	13,29%	28,67%	69,93%	1,40%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos, sem calculadora, consultados

cont 1 not	22,58%	20,37%	33,33%	20,00%	18,37%	52,63%	26,83%	23,00%	0,00%
Adm 1 m	27,42%	11,11%	14,81%	24,00%	14,29%	10,53%	17,07%	19,00%	50,00%
Cont 2 Not	4,84%	24,07%	14,81%	13,33%	16,33%	10,53%	21,95%	11,00%	0,00%
Inf 1	20,97%	38,89%	18,52%	20,00%	44,90%	10,53%	29,27%	27,00%	0,00%
Adm b m	24,19%	5,56%	18,52%	22,67%	6,12%	15,79%	4,88%	20,00%	50,00%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

S/calculadora

	Quest4			Questão 5			Questão 6		
	Sim	Não	Não Resp	Favorável	Desfavorável	Não Resp	Certo	Errado	Vazio
cont 1 not	3	31	0	18	7	9	7	24	3
Adm 1 m	2	24	1	9	16	2	12	14	1
Cont 2 Not	1	19	0	17	3	0	2	17	1
Inf 1	2	37	0	15	19	5	5	24	10
Adm b m	3	20	0	9	8	6	10	12	1
TOTAL	11	131	1	68	53	22	36	91	16

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

cont 1 not	2,10%	21,68%	0,00%	12,59%	4,90%	6,29%	4,90%	16,78%	2,10%
Adm 1 m	1,40%	16,78%	0,70%	6,29%	11,19%	1,40%	8,39%	9,79%	0,70%
Cont 2 Not	0,70%	13,29%	0,00%	11,89%	2,10%	0,00%	1,40%	11,89%	0,70%
Inf 1	1,40%	25,87%	0,00%	10,49%	13,29%	3,50%	3,50%	16,78%	6,99%
Adm b m	2,10%	13,99%	0,00%	6,29%	5,59%	4,20%	6,99%	8,39%	0,70%
TOTAL	7,69%	91,61%	0,70%	47,55%	37,06%	15,38%	25,17%	63,64%	11,19%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos, sem calculadora, consultados

cont 1 not	27,27%	23,66%	0,00%	26,47%	13,21%	40,91%	19,44%	26,37%	18,75%
Adm 1 m	18,18%	18,32%	100,00%	13,24%	30,19%	9,09%	33,33%	15,38%	6,25%
Cont 2 Not	9,09%	14,50%	0,00%	25,00%	5,66%	0,00%	5,56%	18,68%	6,25%
Inf 1	18,18%	28,24%	0,00%	22,06%	35,85%	22,73%	13,89%	26,37%	62,50%
Adm b m	27,27%	15,27%	0,00%	13,24%	15,09%	27,27%	27,78%	13,19%	6,25%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

S/calculadora

	Questão7			Questão 8			Questão 9		
	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio
cont 1 not	8	17	9	16	16	2	7	22	5
Adm 1 m	10	12	5	15	12	0	20	5	2
Cont 2 Not	11	7	2	8	12	0	1	19	0
Inf 1	12	12	15	17	18	4	7	24	8
Adm b m	3	20	0	13	10	0	6	17	0
TOTAL	44	68	31	69	68	6	41	87	15

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

cont 1 not	5,59%	11,89%	6,29%	11,19%	11,19%	1,40%	4,90%	15,38%	3,50%
Adm 1 m	6,99%	8,39%	3,50%	10,49%	8,39%	0,00%	13,99%	3,50%	1,40%
Cont 2 Not	7,69%	4,90%	1,40%	5,59%	8,39%	0,00%	0,70%	13,29%	0,00%
Inf 1	8,39%	8,39%	10,49%	11,89%	12,59%	2,80%	4,90%	16,78%	5,59%
Adm b m	2,10%	13,99%	0,00%	9,09%	6,99%	0,00%	4,20%	11,89%	0,00%
TOTAL	30,77%	47,55%	21,68%	48,25%	47,55%	4,20%	28,67%	60,84%	10,49%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos, sem calculadora, consultados

cont 1 not	18,18%	25,00%	29,03%	23,19%	23,53%	33,33%	17,07%	25,29%	33,33%
Adm 1 m	22,73%	17,65%	16,13%	21,74%	17,65%	0,00%	48,78%	5,75%	13,33%
Cont 2 Not	25,00%	10,29%	6,45%	11,59%	17,65%	0,00%	2,44%	21,84%	0,00%
Inf 1	27,27%	17,65%	48,39%	24,64%	26,47%	66,67%	17,07%	27,59%	53,33%
Adm b m	6,82%	29,41%	0,00%	18,84%	14,71%	0,00%	14,63%	19,54%	0,00%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

S/calculadora

	Questão 10			Questão 11			Questão 12			Questão 13			Tempo
	Certo	Errado	Vazio	Certo	Errado	Vazio	Sim	Não	Vazio	Certo	Errado	Vazio	médio
cont 1 not	7	20	7	21	11	2	2	22	10	5	29	0	38,3
Adm 1 m	6	20	1	25	2	0	1	15	11	5	21	1	34,74
Cont 2 Not	1	14	5	10	4	6	0	5	15	5	14	1	36,15
Inf 1	5	28	6	23	11	5	1	20	18	5	34	0	38,9
Adm b m	2	21	0	15	8	0	5	17	1	5	16	2	49,83
TOTAL	21	103	19	94	36	13	9	79	55	25	114	4	***39,584***

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos consultados: com calculadora e sem calculadora

cont 1 not	4,90%	13,99%	4,90%	14,69%	7,69%	1,40%	1,40%	15,38%	6,99%	3,50%	20,28%	0,00%	26,78%
Adm 1 m	4,20%	13,99%	0,70%	17,48%	1,40%	0,00%	0,70%	10,49%	7,69%	3,50%	14,69%	0,70%	24,29%
Cont 2 Not	0,70%	9,79%	3,50%	6,99%	2,80%	4,20%	0,00%	3,50%	10,49%	3,50%	9,79%	0,70%	25,28%
Inf 1	3,50%	19,58%	4,20%	16,08%	7,69%	3,50%	0,70%	13,99%	12,59%	3,50%	23,78%	0,00%	27,20%
Adm b m	1,40%	14,69%	0,00%	10,49%	5,59%	0,00%	3,50%	11,89%	0,70%	3,50%	11,19%	1,40%	34,85%
TOTAL	14,69%	72,03%	13,29%	65,73%	25,17%	9,09%	6,29%	55,24%	38,46%	17,48%	79,72%	2,80%	27,68%

Cálculo da porcentagem em relação ao total de alunos, sem calculadora, consultados

cont 1 not	33,33%	19,42%	36,84%	22,34%	30,56%	15,38%	22,22%	27,85%	18,18%	20,00%	25,44%	0,00%	96,76%
Adm 1 m	28,57%	19,42%	5,26%	26,60%	5,56%	0,00%	11,11%	18,99%	20,00%	20,00%	18,42%	25,00%	87,76%
Cont 2 Not	4,76%	13,59%	26,32%	10,64%	11,11%	46,15%	0,00%	6,33%	27,27%	20,00%	12,28%	25,00%	91,32%
Inf 1	23,81%	27,18%	31,58%	24,47%	30,56%	38,46%	11,11%	25,32%	32,73%	20,00%	29,82%	0,00%	98,27%
Adm b m	9,52%	20,39%	0,00%	15,96%	22,22%	0,00%	55,56%	21,52%	1,82%	20,00%	14,04%	50,00%	125,88%
TOTAL	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Mauro de Salles. **Como preparar seu filho (e você também) para o trabalho no ano 2000.** Exame, Rio de Janeiro, ano XXVI - n. 17, 17 agosto 1994.

BALBIN, Pierre e KOULOUMDJIAN, Marie-France. **Os novos modos de compreender.** 1°ed. São Paulo ;Edições Paulinas, 1989.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática.** 2° ed. São Paulo:Moderna, 1991.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2 ed. Edgard Blücher Ltda, 1978.

CARRAHER,Terezinha, CARRAHER, David, SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez na escola zero**. 6°ed. São Paulo: Cortez, 1991.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação reflexões sobre educação e matemática**. Campinas: Summus,1986.

D'AMBROSIO, Ubitatan, **Etnomatemática**.São Paulo: Ática, 1990.GIL, Antonio C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 3° ed. São Paulo: Atlas, 1991.

DAVIS, Philip J., Hersh, REUBEN. **A experiência matemática.** Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

ESPÍRITO SANTO, Alexandre do. **Delineamentos de Metodologia Científica.** São Paulo: Loyola, 1992.

GIL, Antonio Carlos. **Técnicas de pesquisa em economia**. 3° ed. São Paulo: Atlas, 1991.

KAHN, Brian. **Os computadores no ensino da ciência**. Lisboa :Dom Quixote, 1991.

KELINGER, F. N. **Metodologia da pesquisa em ciências sociais: um tratamento conceitual** São Paulo: EPU,1980.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**. 2° ed. São Paulo: Cortez, 1987.

MARCONI, Marina de A. e LAKATOS, Eva M. **Técnicas de Pesquisa**. 2° ed. São Paulo: Atlas, 1992.

NOT, Louis, **As pedagogias do conhecimento**. São Paulo: DIFEL, 1981.

PAPERT,Seymour. **Logo: computadores e educação.** 1°ed. São Paulo: Brasiliens, 1985.

SELLTIZ, C., IAHODA, M. M. DEUTSCH, M. COOKS, S. W. **Métodos da pesquisa nas relações sociais.** São Paulo: EPU,1987.

SANTOS, José Abel Royo dos. **Mini-calculadoras eletrônicas.** 2° ed. Edgard Blücher Ltda, 1979.

STEGEMANN, Carlos et al. **A Matemática está errada**. Globo Ciência, São Paulo, v.3, n.34, p.47-51, maio/94.

TRENBLAY, Jean Paul e BUNT, Richard B. **Ciências dos computadores uma abordagem algorítmica.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.